MATEMATICA MODERNA 3º

C. Marcos
J. Martinez

MATEMATICA MODERNA

CONSTANTINO MARCOS, S. M.
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICAS

JACINTO MARTÍNEZ, S. M.
DOCTOR EN CIENCIAS EXACTAS

MATEMATICA MODERNA

TERCER CURSO DE BACHILLERATO

Plan 1967

EDICIONES, S. M.
Gral. Tabanera, 39 • MADRID 19

en distribución con

BIBLIOGRAFICA ESPAÑOLA, S. A. • **EDITORIAL BRUÑO** • **EDITORIAL L. VIVES**
Nieremberg, 14 - MADRID
Bocángel, 15 - MADRID
Fdo. el Católico, 63 - ZARAGOZA

Edita: Ediciones S. M.

Con las debidas licencias

Depósito Legal: V. 629 - 1970

Impresión: Artes Gráficas Soler, S. A. - Jávea, 30 - Valencia (8) - 1970

IMPRESO EN ESPAÑA - *Printed in Spain*

PRÓLOGO

Impuestas obligatoriamente las orientaciones de la llamada Matemática Moderna en nuestro Bachillerato Elemental, este libro se ajusta exactamente a los Cuestionarios que publicó el "Boletín Oficial del Estado" de 30 de septiembre de 1967, y al mismo tiempo continúa el carácter renovador de nuestras MATEMÁTICA MODERNA 1.º y 2.º, que tanto han contribuido a difundir dichas orientaciones.

En este curso la presentación de las ideas no es ya estrictamente intuitiva y experimental, sino que se dan los primeros pasos en el campo de la abstracción y de la demostración deductiva. De todos modos se ha procurado dar a estas lecciones un carácter marcadamente práctico, de conformidad con la psicología de los muchachos a quienes están destinadas. Se ha procurado reducir la teoría al mínimo indispensable, para lograr, en cambio, que el alumno trabaje por sí mismo en la resolución de variados y múltiples problemas. Especial cuidado se ha puesto en dejar de lado todas aquellas cuestiones, teoremas o demostraciones que sobrepasen la capacidad mental de un alumno de Tercer Curso de Bachillerato.

Gran número de ejemplos esmaltan el texto, y al fin de cada lección se han colocado buena cantidad de ejercicios, que es conveniente se resuelvan, por lo menos en parte, antes de pasar a la lección siguiente. Nada mejor, en efecto, para asegurar la teoría aprendida y darse cuenta cabal del significado y alcance de los teoremas estudiados. Creemos que, bien seguido este método, alcanzará el alumno al fin de curso una práctica estimable de los principales recursos del cálculo e ideas bien claras sobre las materias tratadas.

Esto resulta particularmente cierto respecto de los números racionales, cuyas operaciones se han desarrollado con gran extensión y abundancia de ejemplos, por entender que es fundamental que los escolares distingan bien claramente las diferencias entre los números naturales, estudiados en Primer año, los números enteros, considerados en Segundo año, y los números racionales, aquí tratados. Los tres años el estudio detenido de las propiedades de las operaciones con los números ha de llevar, naturalmente, a la resolución de ecuaciones, con un campo cada vez más ampliado. En este curso se hace un tratamiento más exhaustivo y profundo de dichas ecuaciones, utilizando ya las propiedades del cuerpo de los números racionales.

La imposibilidad de demostrar el teorema de Thales sin hacer uso del cuerpo de los números reales, que no se introducen hasta Sexto curso, nos mueve a una nueva presentación de la teoría de la proporcionalidad y semejanza, que no requiere para nada dar previamente la teoría de la medida de segmentos. Es éste otro de los asuntos en que más insistimos en este libro. El método empleado nos permite dar de paso las propiedades de las proporciones.

Los problemas de Cálculo comercial, mezclas y repartimientos proporcionales pierden importancia en esta nueva concepción. Son considerados como lo que en realidad son: meras aplicaciones de la ecuación lineal o de primer grado. La Geometría métrica se reduce también a sus justos límites por los autores de los Cuestionarios.

Pretendemos que las difíciles cuestiones matemáticas les entren a los alumnos "por los ojos", siempre que sea posible. Por eso hemos dedicado especial cuidado a la parte gráfica.

Agradecemos cordialmente su colaboración a cuantos han contribuido con sus consejos a la redacción de este libro.

LOS AUTORES

ÍNDICE

		Págs.
1.	Relaciones binarias en un conjunto	11
2.	Relaciones de equivalencia	19
3.	Relaciones de orden	25
4.	Funciones y gráficas	29
5.	Fracciones	41
6.	El número racional	51
7.	Adición de números racionales	63
8.	Propiedades de la adición de números racionales	70
9.	Sustracción de números racionales	75
10.	Multiplicación de números racionales	83
11.	Propiedades de la multiplicación de números racionales.	92
12.	División de números racionales	105
13.	Trasposición de factores y divisores	111
14.	Potencias y raíces de números racionales	116
15.	Fracciones decimales	122
16.	Proporcionalidad de segmentos	126
17.	Semejanza de triángulos	136
18.	Semejanza de polígonos	147
19.	Razón de las áreas y construcción de polígonos semejantes	155
20.	Ecuación de primer grado	162
21.	Problemas de primer grado con una incógnita	169
22.	Aplicación a los problemas de repartimientos proporcionales y de mezclas	181
23.	Aplicación a la Aritmética comercial	189
24.	Sistemas de ecuaciones lineales	198
25.	Inecuaciones	212
26.	Relaciones métricas en el triángulo rectángulo	219
27.	Ángulos en la circunferencia	227
28.	Razones goniométricas de un ángulo agudo	236
29.	Resolución de triángulos rectángulos	244

1

Relaciones binarias en un conjunto

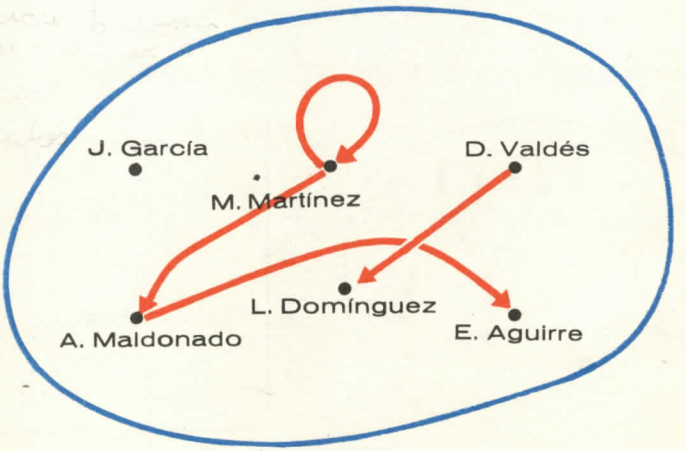
1. Definición

Seis niños están jugando. Se llaman Juanito García, Manolo Martínez, Daniel Valdés, Alicia Maldonado, Luisa Domínguez y Enriqueta Aguirre.

El juego consiste en que cada uno debe dar una canica a aquellos niños del grupo cuyo apellido comienza por la misma letra que el nombre suyo. Así:

Alicia M. da una canica a E. **A**guirre; **D**aniel V. da una canica a L. **D**omínguez, etc.

En lugar de completar esta lista, para hacer el juego más intuitivo, podemos representar cada niño por un punto, y cada vez que uno debe dar una bola a otro, dibujamos una flecha que va del primero al segundo. Algún niño, como Manolo Martínez, debe darse una bola a sí mismo. Esto se representa mediante un lazo o flecha que sale del punto y vuelve al mismo. Así resulta el siguiente **grafo:**



Este grafo representa una **relación** en el conjunto de niños considerado.

Siempre que una flecha sale de **a** y llega a **b**, diremos que el par ordenado (a, b) es un **elemento de la relación.**

Relación es un conjunto de pares. ordenados

EJEMPLOS:

1.º Detalla el conjunto de pares de la relación precedente.

Son los siguientes: (M. Martínez, M. Martínez), (M. Martínez, A. Maldonado), (D. Valdés, L. Domínguez), (A. Maldonado, E. Aguirre).

Designando con las letras *a, b, c, d, e* y *f* a los seis niños, también suele escribirse: bRb, bRd, cRe, dRf.

En general, en una relación cualquiera, **a R b** significa que **a** está relacionado con **b** en dicha relación, o sea que hay una flecha de **a** hacia **b.**

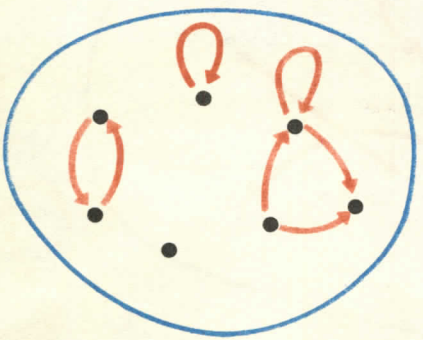
2.º Los siete niños indicados en la figura 1.ª juegan al juego de las canicas indicado anteriormente, con los resultados que se expresan. Inventa tú nombres y apellidos de los siete niños, de modo que cumplan esta relación.

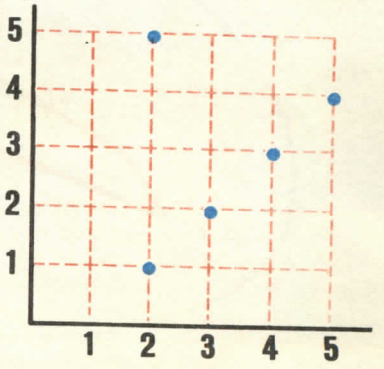
3.º Detalla el conjunto de los pares de la relación precedente de las dos formas.

4.º Sea en el conjunto $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ la relación definida por los pares (2, 1), (2, 5), (3, 2), (4, 3), (5, 4), a cuyo conjunto lo llamamos A. Observa que este conjunto A es un subconjunto del conjunto producto $C \times C$, o sea

$$A \subset C \times C$$

Representa gráficamente dicho conjunto A, como en la figura 2.ª:





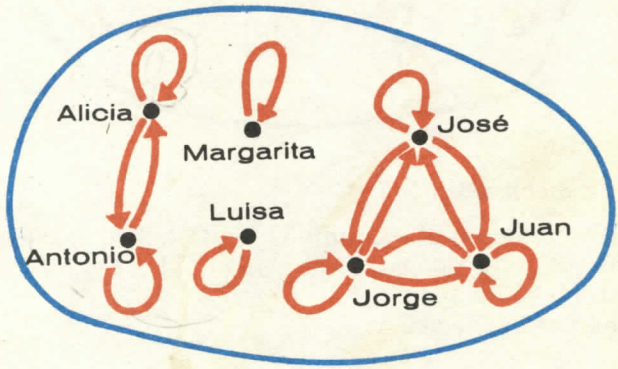
El conjunto producto C × C viene representado por todos los nudos de la red; el conjunto A, solamente por los 5 puntos señalados.

Dar una relación en un conjunto C es dar un subconjunto A del conjunto producto C × C.

2. Propiedad reflexiva

Siete niños: Antonio, Alicia, Margarita, Luisa, José, Juan y Jorge están jugando. El juego consiste en que cada uno debe dar una canica a aquellos niños del grupo cuyo nombre comienza con la misma letra que el nombre de él.

Dibuja el grafo de esta relación, así:



Observa que de todo punto sale una flecha que vuelve al mismo, puesto que cada niño debe darse una canica a sí mismo.

Se dice que esta relación es **reflexiva.**

Una relación tiene la propiedad reflexiva cuando su grafo presenta un bucle o lazo en todos y cada uno de sus puntos.

El símbolo de la propiedad reflexiva es el siguiente:

EJEMPLOS:

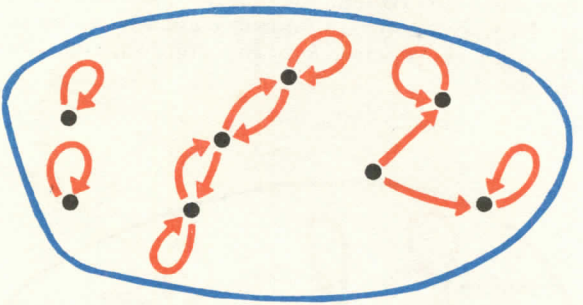
1.º En un conjunto de niños vamos a considerar la relación **"tener los mismos padres que".** Dos niños están ligados por esta relación si son hermanos, y no están ligados en caso contrario.

¿Es reflexiva esta relación, o sea tiene cada niño los mismos padres que él mismo?

2.º En el conjunto de las rectas del plano definimos la relación de perpendicularidad. Una recta **a** es perpendicular a otra **b** si forma con ella ángulos rectos.

¿Es reflexiva esta relación, o sea una recta **a** es perpendicular a ella misma?

3.º Una relación viene dada por el siguiente grafo:



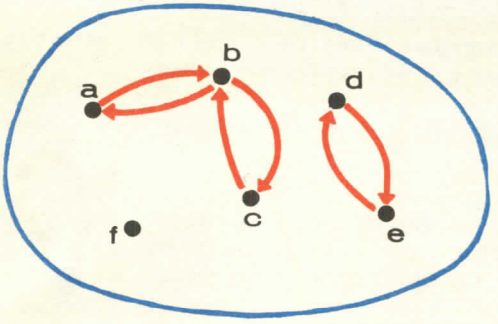
¿Es reflexiva dicha relación?

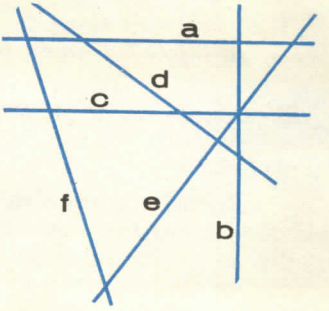
4.º Una relación en el conjunto C = {1, 2, 3, 4, 5} viene dada por el siguiente conjunto de pares: [1, 1], [1, 2], [2, 2], [2, 3], [3, 3], [3, 4], [4, 4], [4, 5], [5, 5], [5, 2].

¿Es reflexiva esta relación?

3. Propiedad simétrica

En un plano trazamos varias rectas que designamos con las letras **a, b, c, d, e** y **f,** y consideramos entre ellas la relación de **perpendicularidad** que viene dada por el siguiente grafo:





Observa que cada vez que hay una flecha de un punto a otro, hay una segunda flecha que va del segundo al primero; efectivamente, si **a** es perpendicular a **b**, también es **b** perpendicular a **a**.

Se dice que la relación de perpendicularidad entre rectas es **simétrica.**

Una relación es **simétrica** si cada vez que su grafo contiene una flecha que va de **a** hacia **b**, hay otra que va de **b** hacia **a**.

El símbolo de la propiedad reflexiva es

EJEMPLOS:

1.º En el ejemplo anterior detalla los pares ordenados que definen la relación de perpendicularidad en el conjunto de las rectas **a, b, c, d, e, f.**

2.º ¿Es simétrica la relación del juego de canicas en el número 1? ¿Y la del número 2?

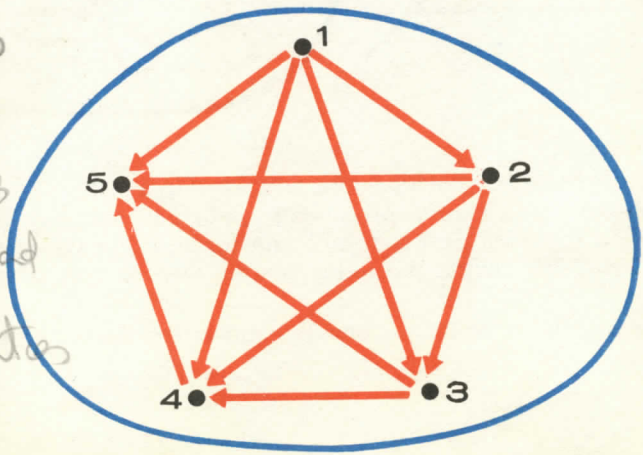
3.º En un conjunto de niños definimos la relación de vecindad. Dos niños serán vecinos si habitan en la misma casa.
¿Es simétrica esta relación?

4.º ¿Es simétrica la relación "ser hermanos"?

5.º La relación "ama a" es simétrica en el conjunto {Romeo, Julieta}. Desgraciadamente no lo es en el conjunto de toda la humanidad.

4. Propiedad antisimétrica

En el conjunto C = {1, 2, 3, 4, 5} consideramos la relación "ser menor que". Traza el grafo correspondiente.



Observa que si **a** es menor que **b**, no puede ser **b** menor que **a**. O sea no puede haber en ningún caso una flecha que vaya de **a** a **b** y otra de **b** a **a**.

Se dice que esta relación es **antisimétrica.**

Una relación es **antisimétrica** si su grafo no contiene nunca simultáneamente una flecha que va de **a** hacia **b** $\neq$ **a**, y una flecha que va de **b** hacia **a.**

EJEMPLOS:

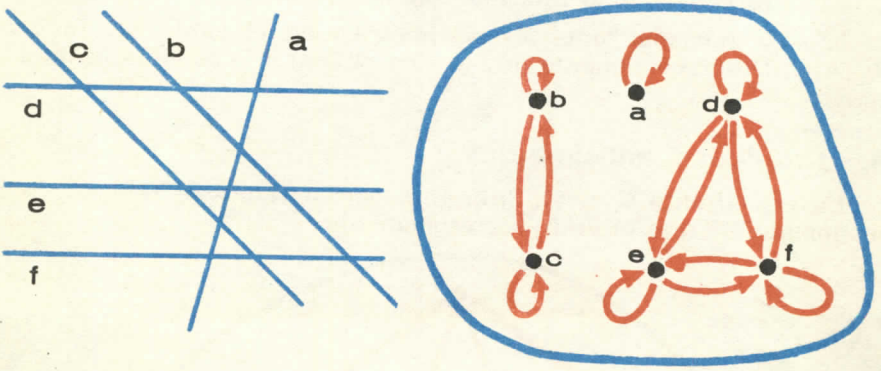
1.º Detalla los pares ordenados que definen la relación "es menor que" en el conjunto C = {1, 2, 3, 4, 5}.

2.º ¿Es antisimétrica la relación del juego de canicas del número 1? ¿Y la del número 2?

3.º ¿Es antisimétrica la relación "está incluido en" definido en el conjunto de las partes de un conjunto? O sea, si A $\subset$ B, siendo A $\neq$ B, ¿puede ser B $\subset$ A?

5. Propiedad transitiva

En un plano trazamos un conjunto de rectas **a, b, c, d, e** y **f,** definiendo en él la relación de **paralelismo:** sabemos que dos rectas paralelas forman entre sí un ángulo nulo. Así resulta el grafo adjunto.



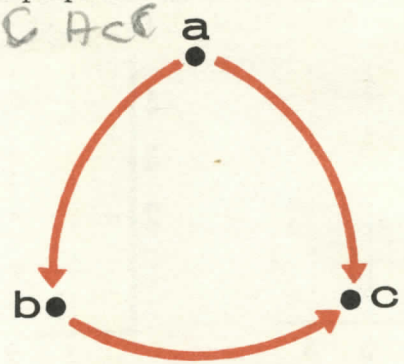
¿Es reflexiva esta relación? ¿Es simétrica?

Pero observa una nueva propiedad: cada vez que hay una flecha que va de **e** a **f,** y otra de **f** a **d,** hay una tercera que va de **e** hacia **d;** efectivamente, dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.

Se dice que la relación de paralelismo entre rectas es **transitiva.**

Una relación es **transitiva** si su grafo satisface la condición de que si una flecha va de **a** hacia **b** y otra de **b** hacia **c**, entonces hay una flecha que va de **a** hacia **c**.

El símbolo de la propiedad transitiva es



EJEMPLOS:

1.º Detalla los pares ordenados que definen la relación de paralelismo entre las rectas **a, b, c, d, e** y **f** del ejemplo anterior.

2.º ¿Es transitiva la relación del juego de canicas del número 1? ¿Y la del número 2?

3.º ¿Son transitivas las relaciones: "ser hermano de", "ser menor que", "ser vecino de"?

EJERCICIOS

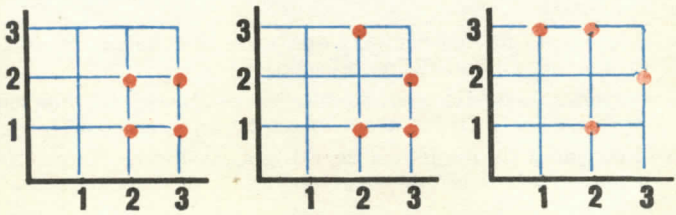
1. El par ordenado (David, Salomón), ¿satisface la relación *"x fue el padre de y"*? ¿Y el par (Benjamín, Jacob)?

2. Los pares (3, 4), (2, 5) y (6, 8), ¿satisfacen la relación *"x es menor que y"*? ¿Y los pares (4, 2), (9, 6) y (5, 1)?

3. Señala cuáles de las siguientes expresiones son verdaderas y cuáles son falsas, si R representa la relación *"x es mayor que y"*: *a*) 3 R 6; *b*) 9 R 5; *c*) 7 R 4; *d*) 2 R 5.

4. Escribe los pares ordenados que satisfacen a cada una de las relaciones expresadas en los siguientes gráficos y definidas en el conjunto U = {1, 2, 3}:

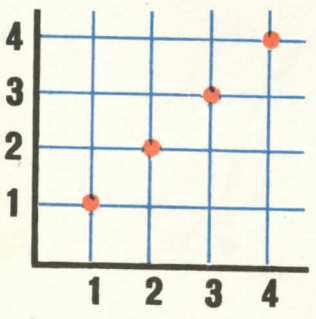
a) *b)* *c)*

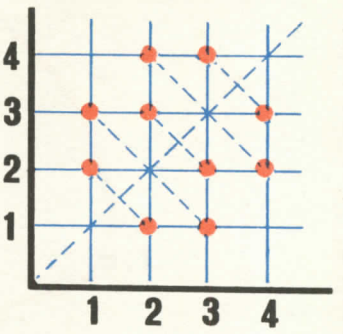


5. Sea la relación R = {(1, 4), (5, 3), (2, 5), (4, 1), (6, 2)}. ¿En qué conjunto está definida dicha relación?

6. ¿Son reflexivas las relaciones *"es amigo de"*, *"es tan alto como"*?

7. Siendo A = {1, 2, 3, 4}, la relación *"es igual a"*, o sea " = " extrae de A × A los pares ordenados (1, 1), (2, 2), (3, 3) y (4, 4). ¿Es reflexiva dicha





relación " = "? Traza su gráfica y observa que todos los puntos de la bisectriz del cuadrante pertenecen a la misma.

8. ¿Son simétricas las relaciones *"es amigo de"*, *"está casado con"*, *"tiene igual edad que"*, *"es primo de"*, *"es padre de"* y *"es paralelo a"*?

9. En el conjunto A = {1, 2, 3, 4} se define la relación R = [(1, 3), (4, 2), (2, 4), (2, 3), (3, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 4), (4, 3)]. ¿Es simétrica esta relación?

Traza su gráfica y observa que esta representación gráfica es simétrica respecto a la bisectriz del cuadrante.

10. ¿Son transitivas las relaciones *"es amigo de"*, *"es menor que"* y *"es hermano de"*?

11. En el conjunto A = {1, 2, 3, 4} se define la relación R = {(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 1) y (4, 4)}. ¿Es simétrica esta relación? ¿Es reflexiva? ¿Es transitiva? ¿Es antisimétrica?

12. ¿Es antisimétrica la relación *"está incluido en"*, o sea "⊂", definida en el conjunto de las partes de un conjunto U?

13. Se sabe que los planetas del sistema solar, excepto la Tierra, tienen nombres de divinidades romanas. También algunos días de la semana derivan sus nombres de aquellos dioses: martes de Marte, miércoles de Mercurio, jueves de Júpiter, viernes de Venus y sábado de Saturno. Establece una relación R entre el conjunto P de planetas y el conjunto D de días de la semana, atendiendo al origen común de sus nombres. Basta que escribas los pares "Marte R martes", etc.

14. En el conjunto de tus regletas establece la relación *"tener igual color que"*. ¿Qué propiedades tiene dicha relación?

15. En el conjunto de los ríos de Europa estableces la relación *"desembocar en el mismo mar que"*. Di las propiedades de esta relación.

16. En el conjunto de los países de Europa estableces la relación de *"ser limítrofes"*. Di qué propiedades tiene, y haz su representación gráfica.

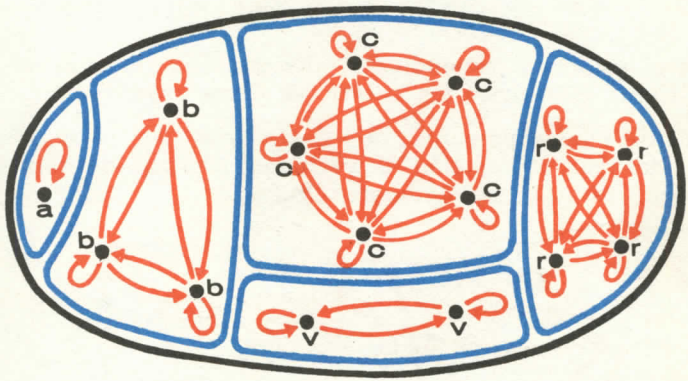
2

Relaciones de equivalencia

6. Definición

Es hacer una clasificación del mismo

Toma un puñado de regletas y establece entre ellas la relación "tener el mismo color que". Traza el grafo correspondiente, por ejemplo el siguiente:



Tienes, por tanto, 1 regleta amarilla, 3 regletas blancas, 5 coloradas, 2 verdes y 4 rosas. ¿Qué propiedades tiene esta relación?

Según se puede observar, tiene las tres propiedades: **reflexiva, simétrica** y **transitiva.**

Toda relación que tenga estas tres propiedades se llama **relación de equivalencia.**

Como ves, esta relación hace aparecer una partición del conjunto de regletas en **clases,** o sea una **clasificación.** Cada clase contiene todas las regletas del mismo color.

Dar en un conjunto una relación de equivalencia es lo mismo que hacer una clasificación del mismo.

Siempre que en un conjunto se ha establecido una relación de equivalencia R, en lugar de escribir a R b, para indicar que los elementos **a** y **b** están relacionados en la misma, se escribe simplemente **a = b:** sustituimos la letra R, de una relación general, por el signo =, propio de las relaciones de equivalencia.

EJEMPLOS:

1.º ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia: "tener el mismo nombre" en un conjunto de niños; "desembocar en el mismo mar" en el conjunto de ríos de una nación; la relación de inclusión entre conjuntos; "ser hermano de" en un conjunto de niños; "ser hijo de" en un conjunto de personas?

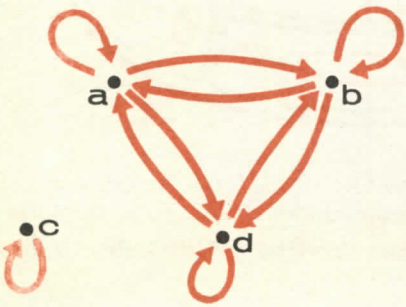
Cuál de las tres propiedades no cumplen aquellas de las citadas que no son relaciones de equivalencia?

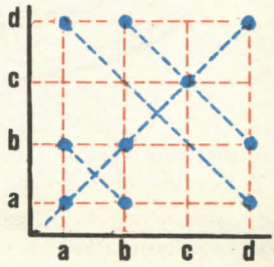
2.º En un conjunto U = {a, b, c, d, e, f} se da la siguiente relación:

a R a, b R b, b R c, c R b, c R c, d R d, d R e,
e R d, e R e, e R f, f R e, f R f, d R f, f R d

Traza el grafo correspondiente. ¿Es ésa una relación de equivalencia? ¿Cómo escribirías los anteriores pares ordenados?

3.º Entre cuatro personas, que designamos por las letras **a, b, c** y **d,** consideramos la relación de **vecindad,** o esa la de habitar en la misma casa. Resultan los siguientes grafos:

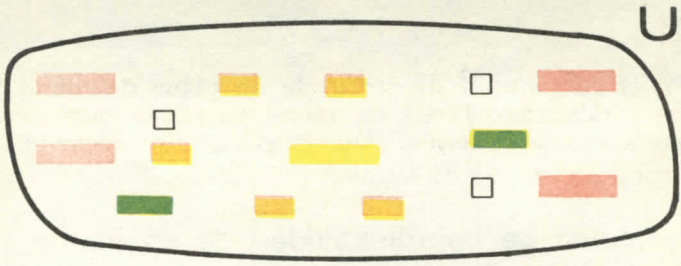




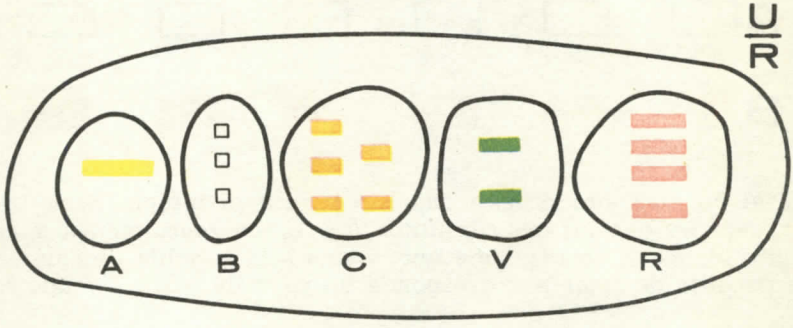
Explícalos: ¿Se trata de una relación de equivalencia? Detalla los pares ordenados que componen la relación, empleando el signo =.

7. Conjunto cociente

Volvamos al puñado de regletas de que hablamos en el número anterior. Llamamos U dicho conjunto.



Una vez clasificadas por su color, o sea en virtud de la relación R "tener el mismo color que" se obtienen como clases los subconjuntos A, B, C, V y R'.



Si consideramos ahora el conjunto {A, B, C, V, R'}, cuyos elementos son las clases, a dicho conjunto le llamamos **conjunto cociente** del conjunto U respecto a la relación R, y lo representamos por $\frac{U}{R}$, o sea

$$\frac{U}{R} = [A, B, C, V, R']$$

El conjunto de clases de equivalencia determinado en U por la relación R se llama conjunto cociente de U por R.

EJEMPLOS:

1.º En el conjunto H de habitantes de una ciudad establecemos la relación R de vecindad. ¿Cuál es el conjunto cociente H/R?

Es el conjunto de casas de la ciudad.

2.º En el conjunto N de niños de una ciudad consideramos la relación R de "ser hermanos" ¿Cuál es el conjunto cociente N/R?

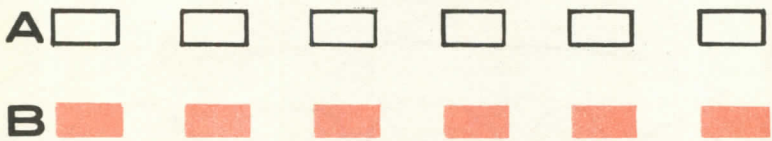
Es el conjunto de familias de la ciudad.

3.º En el conjunto U de rectas de un plano definimos la relación R de paralelismo. Todas las rectas paralelas entre sí decimos que tienen la misma **dirección.** ¿Qué es el conjunto cociente U/R?

Es el conjunto de las direcciones del plano.

8. La relación de coordinabilidad de conjuntos

Toma dos conjuntos, uno A de papelitos blancos, y otro B de papelitos de color. Forma pares que tengan un papelito blanco y un papelito de color.



Si al fin no sobra ningún papelito blanco ni ningún papelito de color, decimos que los dos conjuntos A y B son **coordinables:** a cada papelito blanco le corresponde uno, y uno solo papelito de color, y a cada papelito de color le corresponde un papelito blanco, y uno solo.

EJEMPLOS:

1.º ¿Son coordinables el conjunto A de los dedos de la mano derecha y el conjunto B de los dedos de la mano izquierda?

2.º ¿Son coordinables el conjunto A de corredores de una carrera ciclista y el conjunto B de bicicletas que corren en la misma?

9. El número natural

La relación de coordinabilidad entre conjuntos es:

1.º **Reflexiva.**—Todo conjunto es coordinable consigo mismo.

2.º **Simétrica.**—Si el conjunto A es coordinable con el conjunto B, entonces B es coordinable con A.

3.º **Transitiva.**—Si el conjunto A de alumnos de una clase es coordinable con el conjunto B de asientos de la misma, y éste es coordinable con el conjunto C de mesas, entonces A es coordinable con C.

Por tanto la relación R de coordinabilidad es una relación de equivalencia, que clasifica los conjuntos en clases de equivalencia, cada una de las cuales comprende todos los conjuntos que son coordinables entre sí.

Cada una de estas clases define un **número natural:** todos los conjuntos coordinables entre sí tienen algún parecido, y éste lo expresamos diciendo que tienen el mismo **número** de elementos.

El conjunto cociente U/R, o conjunto de estas clases es el conjunto N de los números naturales

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Número natural es la clase de los conjuntos coordinables entre sí.

EJEMPLOS:

1.º El número ¿es concreto o abstracto?

Es un concepto abstracto que nuestra mente elabora al tratar de comparar los conjuntos que a cada paso encontramos en la vida corriente y al tratar de clasificarlos.

El perrito ve, lo mismo que nosotros, las cuatro patas de una mesa y las cuatro ventanas de la habitación. Pero no observa ninguna relación entre los dos conjuntos. Nosotros, en cambio, notamos que son coordinables, que se parecen en algo, a lo que llamamos **número** de elementos. Este existe sólo en nuestra mente, no tiene realidad física y material: esto es lo que llamamos abstracto.

2.º ¿Es lo mismo el concepto de número que el símbolo con que se representa? ¿Cómo se representa el número **siete** en cifras arábigas? ¿Y en cifras romanas?

No confundas, por tanto, el concepto de número con el símbolo que lo representa: éste ha variado a lo largo de la Historia, pero aquél es siempre el mismo desde el origen de la humanidad.

3.º El número de elementos de un conjunto A se llama **cardinal de A,** y se representa por card (A).

Si B = {a, b, c, d, e, f, g}, halla cuál es card (B).

4.º La serie de números naturales, que conoces desde pequeño, 1, 2, 3, 4, ..., ¿tiene último término?

Decimos que es **ilimitada:** a todo número le sigue otro.

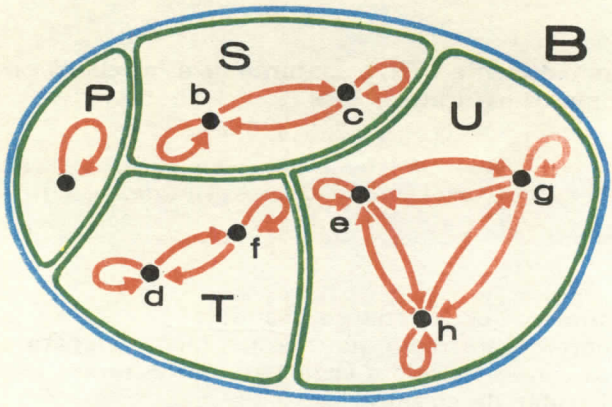
EJERCICIOS

1. Juanito clasifica sus sellos por naciones. ¿Qué clase de relación ha establecido en su colección de sellos? ¿A qué es igual en este caso el conjunto cociente?

2. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia: la de *"ser limítrofes"* entre las naciones de América; la de *"tener la misma nota en Matemáticas"* entre los alumnos de tu clase; la de *"estar delante de"* en un conjunto de alumnos, en formación, que hacen gimnasia? Di qué propiedades no cumplen las relaciones anteriores que no son de equivalencia.

3. La relación de *identidad de conjuntos* ¿es una relación de equivalencia? ¿Por qué?

4. En un conjunto B definimos una relación R expresada por el siguiente grafo:

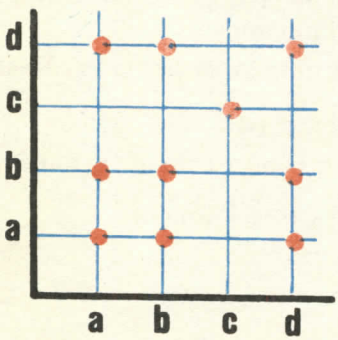


Detalla los pares ordenados de dicha relación. ¿Se trata de una relación de equivalencia? Explica cuál es el conjunto cociente B/R.

5. En el conjunto de alumnos de tu Colegio, ¿cuál es la partición definida por la relación *"estar en el mismo curso"*? ¿Cuál es el conjunto cociente?

6. En el conjunto de alumnos de tu clase, ¿cuál es la clasificación originada por la relación *"estar sentado en la misma fila de mesas"*?

7. En el conjunto de las rectas del plano consideramos la relación de perpendicularidad. ¿Es ésta una relación de equivalencia? ¿Qué propiedades de la misma no cumple?



8. La relación *"ama a"* ¿es de equivalencia? ¿Qué propiedades de la misma cumple y cuáles no?

9. Sea M = {a, b, c, d}, y sea una relación R en M dada por el conjunto de puntos representados en el diagrama de la figura.

a) Traza el grafo correspondiente y di si se trata de una relación de equivalencia.

b) Explica cuál es el conjunto cociente M/R y de cuántas clases consta.

c) Di todos los elementos de M que están relacionados con *b*.

d) Di si son verdaderas o falsas las expresiones siguientes: a R c; c R b; d R a; d $\not R$ c; d $\not R$ b.

10. Estudia la relación de *"paisanaje"*, o sea ser del mismo pueblo o ciudad. ¿Es una relación de equivalencia?

11. ¿Son coordinables el conjunto de los días de la semana y el conjunto de las notas de la escala musical?

12. ¿Es válida la igualdad

$$(7 + 4) - 5 = 7 + (4 - 5)$$

en el conjunto N de los números naturales?

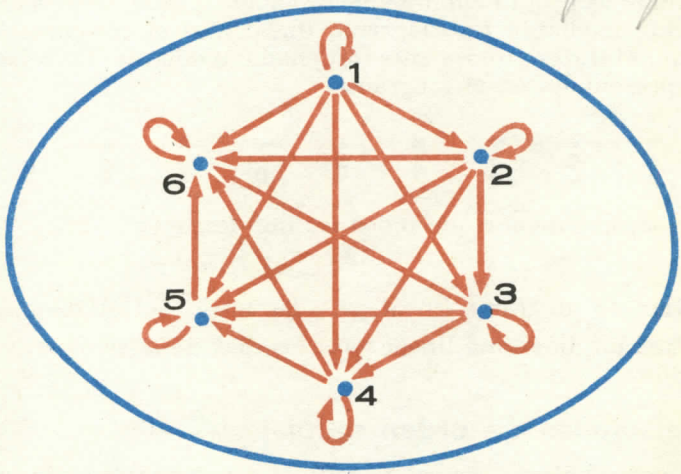
13. Efectúa la operación $7 + \{5 + [6 + (3 - 2)]\}$ y di por qué se obtiene el mismo resultado que al efectuar la operación $\{[(7 + 5) + 6] + 3\} - 2$.

3

Relaciones de orden

10. Definición

En el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} estudia la relación **"ser menor o igual que"**, la cual se representa por el símbolo $\leq$. Traza el grafo de dicha relación:



¿Cuáles son las propiedades de dicha relación?

1.ª **Reflexiva.**—Cualquiera de los números es menor o igual que sí mismo, puesto que cualquiera que sea el número **a,** es

$$a = a$$

2.ª **Antisimétrica.**—Si $a \leq b$, no puede ser $b \leq a$, salvo en el caso $a = b$.

3.ª **Transitiva.**—Si $2 \leq 4$, y $4 \leq 6$, entonces es $2 \leq 6$.

Cualquier relación que cumple estas tres propiedades se dice que es una **relación de orden,** porque establece como una jerarquía entre los elementos del conjunto.

EJEMPLOS:

1.º En el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ¿cualquier elemento está relacionado con todos los demás en la relación $\leq$?

Ciertamente, puesto que de las dos afirmaciones, $a \leq b$, $b \leq a$, por lo menos una es necesariamente verdadera.

Luego cualquier elemento está relacionado con **todos** los demás. Si no se cumple que $a \leq b$, entonces necesariamente es $b \leq a$. Esto se expresa diciendo que la relación $\leq$ es una **relación de orden total,** y que el conjunto A está **totalmente ordenado** por la relación $\leq$.

2.º El conjunto de letras del alfabeto ¿está totalmente ordenado por la relación "es anterior a"? Es el orden alfabético.

3.º El conjunto de palabras de un idioma ¿está totalmente ordenado? Es el orden lexicográfico.

11. Diagrama lineal.

Cualquier conjunto totalmente ordenado puede representarse cómodamente mediante un diagrama lineal. Así el conjunto N de los números naturales, totalmente ordenado mediante la relación $\leq$, viene representado en el diagrama

Cada número es menor que todos los que le siguen.

EJEMPLOS:

1.º Haz un diagrama lineal para las letras del alfabeto.

2.º Haz un diagrama lineal para los días de la semana, y los meses del año.

12. Relaciones de orden parcial

En el curso anterior (núm. 5) estudiamos el conjunto de las partes de un conjunto U = {a, b, c}. Es

$$P(U) = \{\emptyset, A, B, C, D, E, F, U\}$$

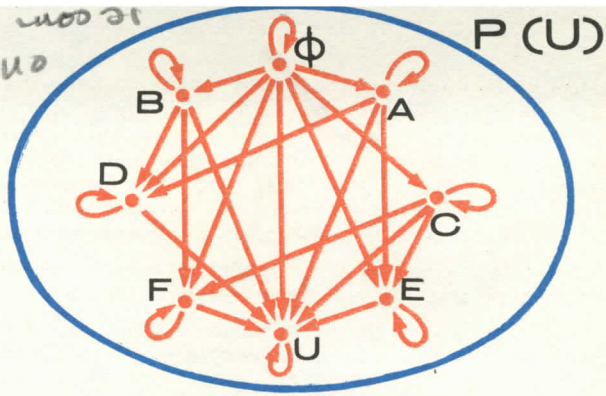
siendo ø el conjunto vacío, A = {a}, B = {b}, C = {c}, D = {a, b}, E = = {a, c}, y F = {b, c}.

En el conjunto P (U) considera la relación "está incluido en", representada por $\subset$, y traza el grafo correspondiente.

Observamos las siguientes propiedades:

1.ª **Reflexiva.**—Todo conjunto es parte de sí mismo.

2.ª **Antisimétrica.**—Si $A \subset E$, no puede ser $E \subset A$, a no ser que los dos conjuntos sean idénticos.



3.ª **Transitiva.**—Si A ⊂ E y E ⊂ U, entonces A ⊂ U.

La relación de inclusión es, por tanto, una **relación de orden.**

Observamos además que el conjunto ø está relacionado con todos los demás, puesto que está contenido en todos, y que el conjunto U está igualmente relacionado con todos los demás, puesto que los contiene a todos. Pero aparte de estos dos, ningún otro conjunto cumple esta condición. Por ejemplo, si consideramos los conjuntos A y B, ni A ⊂ B, ni B ⊂ A. Lo mismo sucede con E y F, etc.

En este caso decimos que se trata de una **relación de orden parcial,** o que el conjunto P (U) está **parcialmente ordenado** mediante la relación ⊂.

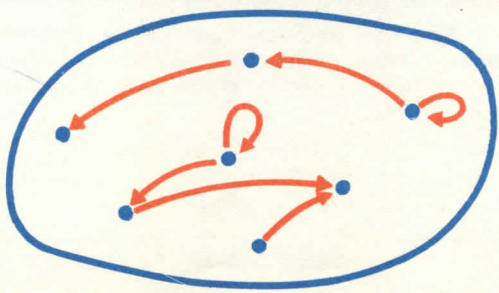
EJEMPLOS:

1.º Haz un diagrama del conjunto P (U) mediante la relación ⊂. En este caso no consta de una sola línea, sino de varias, que salen de ø en sentido ascendente, y de U en sentido descendente (número 5 del curso anterior).

2.º Considera un conjunto de 4 soldados, 2 sargentos y 1 teniente, y estudia la relación de dependencia o de obediencia que existe entre ellos. ¿De qué clase de relación se trata?

EJERCICIOS

1. He aquí algunas flechas del grafo de una relación de orden:



Traza todas las flechas que han sido ciertamente omitidas.

2. En el conjunto totalmente ordenado de los números naturales, ¿cuál es el elemento que *sigue inmediatamente* al 6? ¿Hay algún otro elemento entre el 6 y el 7? Se dice que el conjunto N está *bien ordenado*. ¿Sucede lo mismo, por ejemplo, con los *números decimales*?: al número 0'1 no hay otro que le siga inmediatamente; entre 0'1 y 0'2 hay otros infinitos números decimales, y lo mismo entre dos números decimales cualesquiera. ¿Está bien ordenado el conjunto de los números decimales? ¿Está totalmente ordenado?

3. El conjunto de vértices de un polígono ¿es coordinable con el conjunto de sus lados? ¿Y si se trata de una línea poligonal abierta?

4. Escribe el conjunto P (U) de las partes del conjunto U = {a, b, c, d}. Estudia la relación de inclusión en dicho conjunto. ¿Es una relación de orden total o parcial?

5. Los triángulos equiláteros E son parte de los isósceles I, y éstos son parte de los triángulos T

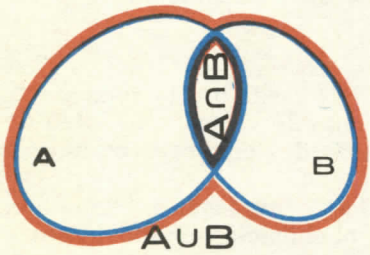
$$E \subset I \subset T$$

¿Está el conjunto de los triángulos parcial o totalmente ordenado mediante esta relación de inclusión? Traza el diagrama correspondiente.

6. Sabemos que siendo C el conjunto de los cuadrados, R el de los rectángulos, R' el de los rombos, y P el de los paralelogramos, se tiene

$$C \subset R \subset P \quad ; \quad C \subset R' \subset P$$

¿Está el conjunto P parcial o totalmente ordenado mediante la relación $\subset$? Traza el diagrama correspondiente, incluyendo el conjunto vacío $\emptyset$.



7. Ordena mediante la relación de inclusión los recintos A, B, $A \cap B$ y $A \cup B$ de la figura adjunta. ¿Es una ordenación parcial o total? Dibuja el diagrama correspondiente, incluyendo el conjunto vacío.

8. Dibuja un exágono regular y traza todas sus diagonales. Clasifica mediante un criterio de igualdad o equivalencia el conjunto de triángulos que resultan.

9. Estudia la relación $\subset$ en el conjunto U = {A, B, C, D}, siendo A = {1, 2}, B = {1, 2, 3}, C = {1, 2, 3, 8} y D = {1, 2, 3, 8, 10}. ¿Es una relación de orden parcial o total? Dibuja el diagrama correspondiente.

10. Te dan las siguientes figuras: cuadriláteros, trapecios, trapecios isósceles, paralelogramos, rombos y cuadrados. ¿Puedes establecer con todas ellas una clasificación por inclusión? ¿Es de orden parcial o total?

4

Funciones y gráficas

Elemento de A uno de B

13. Definición

Hasta ahora hemos estudiado las relaciones binarias entre los elementos de un conjunto. Ahora vamos a considerar relaciones entre dos conjuntos distintos.

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a. b, c\}$. Determina el conjunto producto $A \times B$:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\}$$

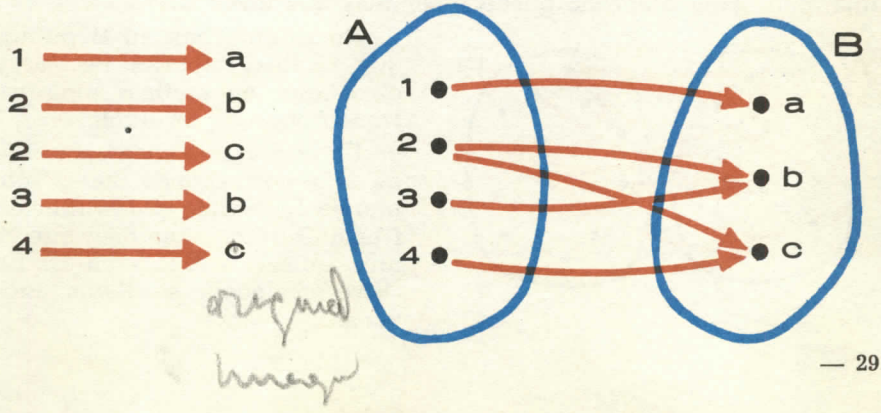
Considera un subconjunto $C \subset A \times B$, por ejemplo éste:

$$C = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, b), (4, c)\}$$

Decimos que el subconjunto C define una **correspondencia** o **función** entre los conjuntos A y B, del siguiente modo: a cada elemento de A se le asigna aquel o aquellos elementos de B que forman par con él en uno de los elementos de C, según se indica en la figura.

La correspondencia o función se ha representado por una flecha, pero también es corriente representarla por letras minúsculas como **f, g, h...**, etc.

Si representamos por **f** la función anterior, esta letra designa, por tanto, un conjunto de pares. Si consideramos el par (1, a), decimos



original
imagen

que **a** es el correspondiente al 1 en la función f, y lo representamos por f (1), o sea

$$a = f\ (1)$$

También decimos que f (1) es la **imagen** en B del elemento 1 de A. Del mismo modo

$$b = f\ (2);\ c = f\ (2);\ b = f\ (3);\ c = f\ (4)$$

A se llama conjunto **original,** y B conjunto **imagen.**

EJEMPLOS:

1.º Sea la función **f** definida por $a \to a + 5$, en que a cada número natural **a** le hacemos corresponder el $a + 5$. Halla f (2), f (10) y f (30).

Se tiene

$$f\ (2) = 2 + 5 = 7$$
$$f\ (10) = 10 + 5 = 15$$
$$f\ (30) = 30 + 5 = 35$$

2.º En el ejemplo anterior, ¿cuál es la imagen de cero por la función **f**?

La imagen del número 0 es $0 + 5 = 5$.

3.º En el ejemplo anterior se sabe que $f\ (x) = 47$. ¿Cuánto vale **x**?

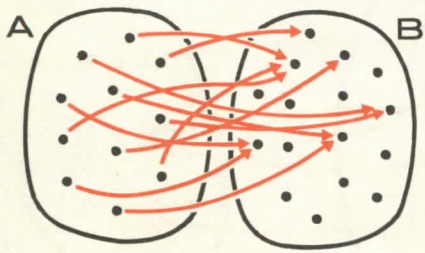
Será $x = 47 - 5 = 42$

4.º Designa por **g** la función "tiene como doble". ¿Cuál es la imagen de 8? ¿Qué número tiene 26 como imagen?

14. Función uniforme o aplicación

He aquí un conjunto A de coches, y nos dedicamos a hallar la marca de cada uno. Establecemos así una correspondencia o función **f** entre el conjunto A de coches y el conjunto B de marcas de coche. Resulta el grafo adjunto.

¿Cuántas flechas salen de cada punto de A? Una, y solamente una, pues cada coche no puede tener más que una marca.



En cambio hay en B puntos que reciben varias flechas y otros que no reciben ninguna. Interpreta este resultado.

En este caso a cada elemento de A le corresponde uno y sólo uno en B: se dice que la función **f** es **uniforme,** y también que es una **aplicación** de A en B. La correspondencia se llama **unívoca.**

que un elemento de A le corresponde uno de B

EJEMPLOS:

1.º En un conjunto de niños, a cada uno le hacemos corresponder su padre. ¿Es una aplicación la correspondencia entre el conjunto A de niños y el conjunto B de sus padres?

2.º La función **f** "estar situada en tal país" está definida para cualquier ciudad. ¿Es uniforme esta función? Halla:

f (Barcelona) = ..., f (Florencia), f (París), f (Montevideo), f (Liverpool), f (San Francisco), f (Lima), f (Málaga) y f (Bonn).

3.º Sea A = {nombres de una guía de teléfonos} y B = {números de las páginas de la guía}. Si a cada nombre se asigna el número de la página correspondiente en que está escrito, ¿es ésta una aplicación o función uniforme?

15. Distintos tipos de aplicaciones

Supongamos que en el ejemplo del párrafo anterior todos los coches del conjunto A son de marca distinta. Entonces cada elemento del conjunto B *recibirá como máximo una flecha.* Llamamos **aplicación inyectiva** una de este tipo.

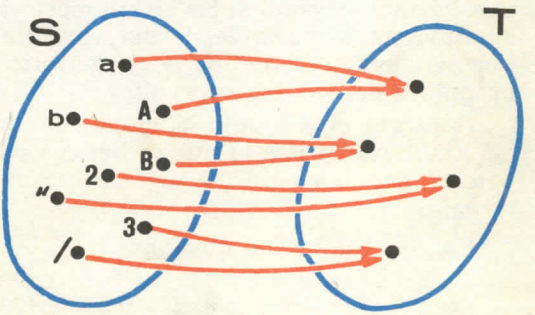
Aplicación inyectiva es aquella en que cada elemento del conjunto imagen es como máximo el homólogo de un elemento del conjunto original.

Llamemos S al conjunto de signos de una máquina de escribir y T al conjunto de teclas de dicha máquina, y hagamos corresponder a cada signo la tecla en que se encuentra. Resultará un grafo como el que se indica en la figura.

Cada signo, como **a,** está en una sola tecla; luego de cada signo de S saldrá una y sólo una flecha.

La correspondencia es una aplicación. Pero además cada elemento de B recibirá *como mínimo* una flecha. No hay ninguna tecla que no tenga alguna misión. Toda tecla será la imagen *por lo menos* de un signo de S. En este caso la aplicación se llama **suprayectiva.**

Aplicación suprayectiva es aquella en que cada elemento del conjunto imagen es homólogo como mínimo de un elemento del conjunto original.



Una aplicación que es al mismo tiempo inyectiva y suprayectiva se llama **biyectiva.** En este caso cada elemento del conjunto imagen recibe una y sólo una flecha. La aplicación biyectiva también se denomina simplemente **biyec-**

ción, y en los cursos anteriores se le dio el nombre de **correspondencia biunívoca.**

Por ejemplo, entre el conjunto A de los dedos de una mano y el conjunto B de los dedos de la otra mano podemos establecer una biyección. ¿Cómo?

16. Variable

El conjunto de todos los números impares suele representarse por la expresión

$$2n - 1$$

donde **n** representa un elemento cualquiera del conjunto N de los números naturales

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Se dice que **n** es una **variable.**

En general *variable es una letra que representa indistintamente cualquiera de los elementos de un conjunto de números.*

Dicho conjunto se llama **dominio** de la variable.

Si al conjunto de los números impares menores que 10 lo representamos por 2 x — 1, siendo

$$\{x \mid 2x - 1 < 10, x \text{ natural}\}$$

la variable es **x,** y su dominio es el conjunto {1, 2, 3, 4, 5}.

17. Variables dependiente e independiente

Hemos visto que dados dos conjuntos, X e Y, llamamos función a toda correspondencia que asocia a cada elemento de X (conjunto original) uno o varios elementos de Y (conjunto imagen).

Si a todo elemento de X le corresponde un solo elemento de Y, la función se llama **uniforme** o **aplicación.** Las funciones que estudiemos en adelante serán uniformes.

A menudo el conjunto X está formado por todos los valores de una variable **x** contenidos en un cierto intervalo, al que se denomina **dominio** de la variable. Dicha variable suele denominarse **variable independiente,** ya que se le pueden atribuir valores arbitrarios comprendidos dentro del intervalo.

A su vez el conjunto Y suele estar formado por todos los valores de una variable **y,** a la que se llama **variable dependiente,** ya que sus valores dependen de los que se den a **x,** y contenidos en otro intervalo.

En general, con la notación

$$x \xrightarrow{f} y \; ; \; y = f(x)$$

queremos expresar que el número **x** se transforma en el **y**, o que **y** es la imagen de **x** mediante la función **f**.

EJEMPLOS:

1.º El área de un círculo está determinada por su radio, es decir, el área es función del radio:

$$S = \pi r^2$$

2.º El tiempo necesario para recorrer 50 Km. con una velocidad constante es función de la velocidad:

$$t = \frac{50}{v}$$

3.º El coste C de un peso P de turrón es proporcional al peso P: supongamos a 25 pesetas el kilo; será:

$$C = 25\ P$$

Se acostumbra representar la variable dependiente por la letra **y**, y la variable independiente por la letra **x**. De suerte que las funciones anteriores se escribirán así:

$$y = \pi\ x^2 \quad ; \quad y = \frac{50}{x} \quad ; \quad y = 25\ x$$

4.º Sean los conjuntos

$$X = \{x \mid 1, 2, 3, 4\}; \quad Y = \{y \mid 2, 4, 6, 8\}$$

Consideremos el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, y) \mid (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$$

Este conjunto define una correspondencia entre los elementos de los conjuntos X e Y tal que a cada valor de la variable **x** hace corresponder otro de la variable **y** dado por la fórmula

$$y = 2\ x \qquad (1)$$

Si en la función $y = 35\ x$ damos diversos valores a **x**, se van obteniendo los correspondientes valores de **y**. Dichos valores suelen disponerse como en el siguiente cuadro, llamado **tabla de valores** de la función:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0	35	70	105	140	175	210	245

En los próximos números veremos cómo representar gráficamente las funciones.

18. Coordenadas cartesianas

En el curso anterior vimos cómo se pueden representar sobre un eje los números enteros.

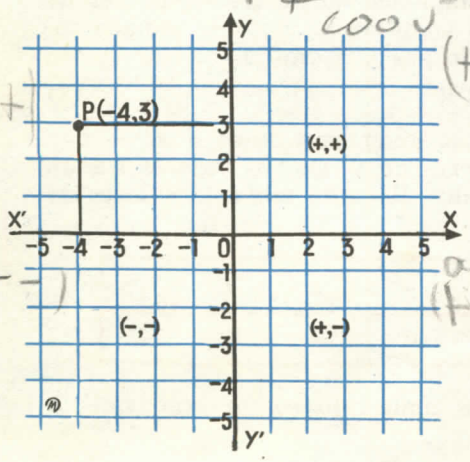
Veamos ahora cómo la determinación de un punto sobre un plano se reduce a la de dos puntos sobre dos ejes.

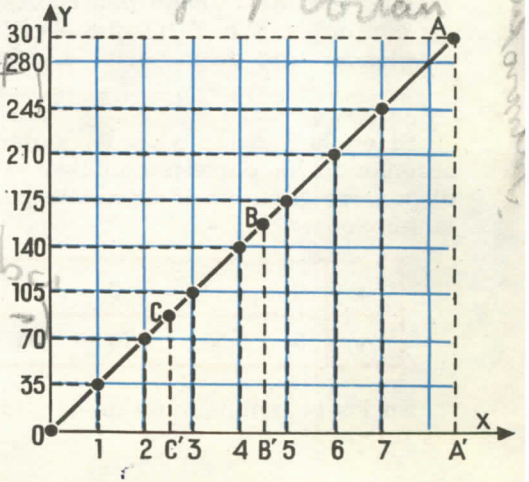
Esta correspondencia entre los puntos y los números es el fundamento de la Geometría Analítica, cuyo objeto es resolver los problemas geométricos mediante los recursos del Álgebra, y que puede considerarse nacida a principios del siglo XVII con Descartes (Cartesius). En honor de este matemático francés se denominan **cartesianas** las coordenadas que vamos a estudiar.

Ejes de coordenadas rectangulares son dos rectas que se cortan perpendicularmente. El punto de intersección se llama **origen de coordenadas.**

Así, tracemos dos rectas, X' X e Y' Y, que se corten en ángulo recto en el punto O, origen de coordenadas. Sobre cada recta elijamos una unidad de medida y marquemos una escala con el cero en el punto O. Los números positivos se ponen a la derecha sobre la recta horizontal X' X y hacia arriba sobre la recta vertical Y' Y. Los números negativos se colocan a la izquierda, sobre X' X, y hacia abajo, sobre Y' Y. La recta X' X se llama **eje de abscisas** y la recta Y' Y **eje de ordenadas.**

Tenemos ahora un punto cualquiera P del plano. Su distancia al eje de ordenadas (medida sobre el eje X' X) se denomina **abscisa** del punto, y se designa por **x;** su distancia al eje de abscisas (medida sobre el eje Y' Y) se llama **ordenada,** y se designa por **y.** La abscisa y la ordenada en conjunto se llaman **coordenadas rectangulares del punto.**





Cada punto del plano viene determinado por sus dos coordenadas. El punto P, de abscisa **x** y ordenada **y**, se representa por P (x, y), nombrando siempre la abscisa la primera. Así, el punto P (—4,3) tiene de abscisa —4 y de ordenada 3.

Las abscisas miden segmentos del eje O X, y las ordenadas segmentos del eje O Y. Las coordenadas de un punto tendrán los signos indicados en la figura, según el cuadrante en que esté dicho punto.

Ejercicio.—En la figura representa los puntos A (2,5), B (— 1, 3), C (— 4, — 2) y D (3, — 3).

19. Representación gráfica de funciones dadas por una ecuación

Sea representar la función lineal

$$y = 35\ x \qquad (2)$$

que da el coste de un trozo de turrón en función de su peso. Según se indica en la tabla de valores del número 17, la ecuación asigna a **y** un valor correspondiente a cada valor de **x**. Los pares de valores así determinados pueden considerarse como las coordenadas de los puntos de un plano. La línea que resulta uniendo esos puntos se llama **gráfica** de la función. Ésta se ha trazado en la figura adjunta. No es necesario que la unidad elegida sobre ambos ejes sea la misma. Puede ser distinta, como se observa en la misma figura, con el fin de que ésta resulte proporcionada. Por cada valor de **x** se toma sobre el eje de ordenadas el valor del coste correspondiente, y se señala un punto. Uniendo todos los puntos conseguidos se obtiene una línea recta.

De aquí se deduce que para hallar el coste de un trozo de turrón de un peso cualquiera, por ejemplo 8,6 Kg., no tenemos más que leer en la figura el valor de la ordenada de la recta OA correspondiente a la abscisa 8,6. Es 301 pesetas.

Esta recta permite, pues, hallar por una simple lectura el valor de la función conocido el de la variable. Esta es una de las principales ventajas y aplicaciones de las representaciones gráficas.

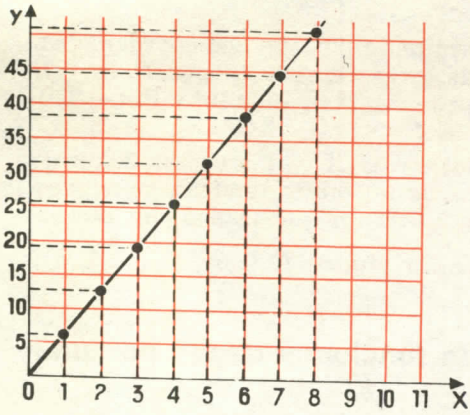
EJEMPLO:

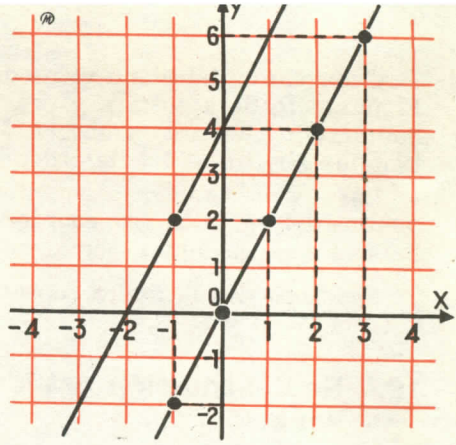
Hallar la representación gráfica de la función que da la longitud de la circunferencia, conocido el radio.

Solución: La función pedida es

$$y = 2\pi x = 6{,}28\ x$$

llamando **y** la longitud de la circunferencia y **x** al radio. Para representarla gráficamente escribiremos primero el cuadro de valores





x	1	2	3	4
y	6,28	12,56	18,84	25,12

Supongamos ahora que sobre el eje de abscisas cada unidad represente, por ejemplo, 1 cm.; y sobre el eje de ordenadas cada unidad equivalga a 5 cm. Representando los valores hallados se encuentra, como en el ejemplo anterior, que los puntos correspondientes están en línea recta. Esta nos permite hallar que, por ejemplo, para un radio $x = 8$ cm., es $y = 50$ cm. aproximadamente. Si en lugar de papel cuadriculado hubiéramos empleado papel milimetrado, hallaríamos con más exactitud $y = 50{,}24$ cm.

20. Aplicación lineal $y = mx$

En el número anterior hemos visto que toda ecuación de la forma

$$y = m\,x$$

donde **m** es una constante cualquiera, es la expresión de la **proporcionalidad directa,** y tiene por representación gráfica una **línea recta que pasa por el origen de coordenadas.**

Como ejemplo se ha representado la ecuación

$$y = 2\,x$$

obteniéndose la recta que pasa por el origen O.

Para ello se ha empleado la tabla de valores siguiente:

x	0	1	2	3	—1
y	0	2	4	6	—2

21. La aplicación afín $y = mx + b$

En la misma figura anterior se ha representado también la ecuación

$$y = 2x + 4$$

Resulta una recta que se obtiene de la anterior sumando 4 unidades a todas las ordenadas. Esto equivale a trasladar paralelamente la recta, como indica la figura.

Tenemos, pues, que de modo general: *La gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas es una línea recta.* Por eso esta ecuación se denomina **ecuación lineal.**

Si la ecuación no tiene término independiente, la gráfica pasa por el origen de coordenadas.

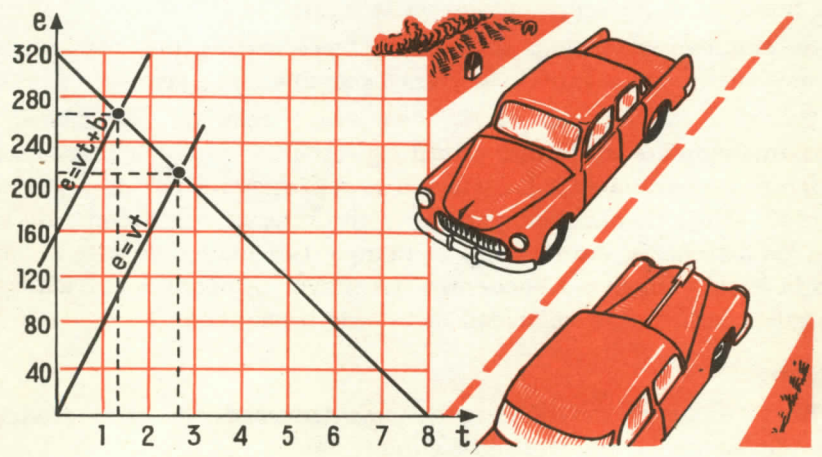
Estos resultados son válidos aunque la ecuación no presente la variable **y** despejada, pues nada impide el despejarla, con lo que se obtiene siempre una ecuación de la forma

$$y = mx + b$$

La constante **m** denomínase **pendiente** de la recta, pues cuanto mayor sea su valor, mayor será el ángulo que forma dicha recta con la parte positiva del eje OX. La constante **b** se llama **ordenada en el origen** de la recta.

22. El movimiento uniforme

Sea un móvil (coche, tren, etc.) que posee un **movimiento uniforme,** esto es, que recorre espacios iguales en tiempos iguales. Entonces se llama **velocidad** al espacio recorrido por el móvil en la unidad de



tiempo, y se representa por **v**. Sea, por ejemplo, v = 80 km/h., esto es, 80 kilómetros por hora. Llamando **e** al espacio recorrido por el móvil en un tiempo **t**, será evidentemente

$$e = 80\ t = vt \qquad (3)$$

Si representamos los espacios **e** como ordenadas y los espacios **t** como abscisas, en un sistema de ejes cartesianos, la representación gráfica será una línea recta, ya que la función (3) es de primer grado. La recta pasa por el origen de coordenadas, ya que dicha función carece de término independiente. Su pendiente es **v**, o sea la velocidad del móvil.

Si éste no sale del origen de coordenadas al empezar el movimiento, sino de un punto distante del mismo **b** km., la ecuación del movimiento será:

$$e = v\ t + b \qquad (4)$$

y se representará por una recta de pendiente **v** y ordenada en el origen **b**. En la figura se ha tomado b = 160 km.

Si suponemos ahora que un tercer móvil, saliendo de un punto distante 320 km. del origen de coordenadas, viene en dirección contraria con velocidad de 40 km/h., ésta ha de considerarse como negativa, o sea — 40 km/h., por ser de sentido contrario a la de los anteriores. Es decir, la ecuación de su movimiento será:

$$e = 320 - 40\ t$$

que también se ha representado en la figura.

Se emplean mucho las **gráficas de ferrocarriles,** que representan el movimiento de los diversos trenes por una línea férrea.

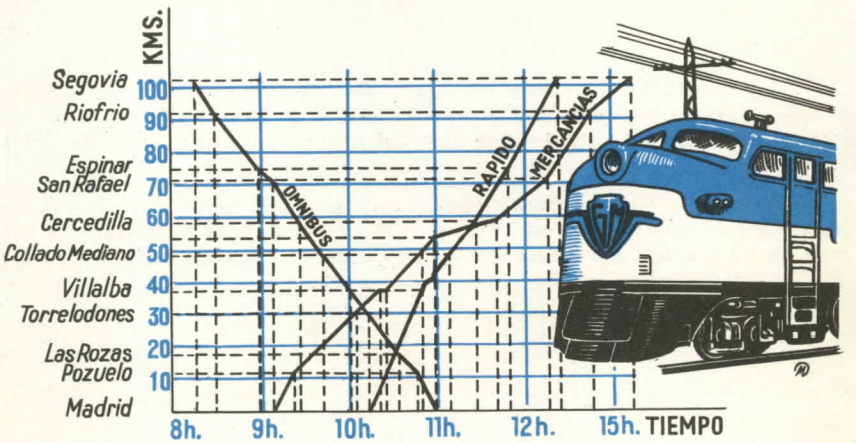
Como el movimiento de un tren entre cada dos estaciones es aproximadamente uniforme, estará representado por una línea recta; el tiempo de parada en cada estación se representará por un segmento paralelo al eje de abscisas, pues en dicho intervalo de tiempo no varían las distancias, pero avanza el tiempo. Los puntos de intersección dan la hora y lugar del encuentro. La mayor o menor inclinación de la gráfica indica si la velocidad es grande o pequeña.

EJEMPLO:

Representar el movimiento de tres trenes de la línea Madrid-Segovia, según los datos de la siguiente tabla:

ESTACIONES	DISTANCIAS (en Km.)	HORARIO Mercancías	Rápido	Omnibus
Madrid	0	9,10	10,15	11,30
Pozuelo	11	9,24		11,00
Las Rozas	18	9,42		10,35
Torrelodones	30	10,06		10,17
Villalba	38	10,21	10,53	10,02
		10,26	10,58	9,59
Collado Mediano	49	10,50	11,10	9,43
Los Molinos	53	11,00		9,36
Cercedilla	58	11,41	11,29	9,28
San Rafael	71	12,16		9,08
Espinar	74	12,27	11,51	9,00
Riofrío	91	12,44		8,31
Segovia	101	13,13	12,25	8,15

La representación se ha hecho en la figura adjunta. Deduce de ella la hora y posición de los encuentros.



EJERCICIOS

1. En un sistema de ejes rectangulares representa los puntos siguientes:
   a) (5, 3); (5, — 3); (— 5, 3); (— 5, — 3); (0, 5); (5, 0); (0, — 5); (— 5, 0).
   b) (3, 1); (5, 2); (7, 3); (1, 0); (— 1, — 1); (— 3, — 2).

2. Traza las gráficas de las funciones siguientes:
   a) $y = 2x - 5$.
   b) $y = -x - 3$.
   c) $y = 2x - 3$.
   d) $x = 2y - 3$.
   e) $3x + 2y = 12$.
   f) $3x - 2y = 12$.
   g) $2x - 5y + 4 = 4$.

3. Representa los conjuntos que se indican:
   a) Conjunto de los meses de 31 días.
   b) Conjunto de los números primos dígitos.
   c) Conjunto de las provincias de Andalucía que son marítimas.
   d) Conjunto de los exponentes de la expresión $7a^3b^2x^4y^5$.

4. Di si el elemento pertenece al conjunto que se indica:
   a) Elemento — 7; conjunto N de los números naturales.
   b) Elemento — 7; conjunto Z de los números enteros.
   c) Elemento 8,4; conjunto Z de los números enteros.

5. En la función $y = mx + 3$, ¿cuál debe ser el valor del coeficiente m para que la función tome el valor 14 cuando a x se le da el valor 3? Explica cómo lo haces.

6. Representa gráficamente las ecuaciones de los movimientos uniformes de dos coches cuyas velocidades son 70 km/h. y 100 km/h., sabiendo que el primero sale de un punto que dista 50 km. del punto de partida del segundo.

7. Un coche camina durante 3 horas con velocidad de 60 km/h.; se detiene luego durante media hora y corre después durante hora y media con velocidad de 90 km/h. Representa gráficamente el movimiento de este coche.

5

Fracciones

23. Definición

¿Cómo resolverías la ecuación

$$3x = -9 \quad ? \qquad (1)$$

Desde el curso anterior sabes que, en virtud de las equivalencias fundamentales de la división de enteros, es

$$x = \frac{-9}{3} = -3$$

Intenta del mismo modo resolver esta ecuación

$$7x = -9 \qquad (2)$$

En este caso es

$$x = \frac{-9}{7}$$

Ahora, no existe el cociente exacto de — 9 entre 7, por lo que la expresión — 9/7 carece de sentido en el campo de los números enteros, y la ecuación (2) no tiene solución. Se comprende la necesidad de crear unos nuevos entes o números que permitan dar solución en todos los casos a ecuaciones análogas a la (2).

Estos nuevos entes van a ser las expresiones de la forma a/b, siendo **a** y **b** números enteros, que denominaremos, respectivamente, **numerador** y **denominador**, enunciados en este orden. Dicha expresión a/b la llamamos **fracción.**

Fracción es un par de números enteros dados en un orden determinado.

Al numerador y denominador de una fracción se llama **términos** de la fracción. Se entiende que si se cambian entre sí los dos términos de una fracción, resulta otra fracción distinta.

EJEMPLOS:

1. ¿Cuál es el numerador y el denominador de la fracción 3/4? El numerador es 3, y el denominador es 4.
2. ¿Vale lo mismo 4/5 que 5/4? No.
3. La fracción — 7/8 también se representa por el par (— 7, 8). Representa como pares las siguientes fracciones:

$$\frac{2}{5} \; ; \; \frac{3}{7} \; ; \; \frac{-8}{9} \; ; \; \frac{-2}{7} \; ; \; \frac{5}{8} \; ; \; \frac{9}{16} \; ; \; \frac{-3}{7}$$

4. Expresa como fracciones los pares

$$(-2, 3) \; ; \; (3, 5) \; ; \; (8, -7) \; ; \; (2, 9)$$

24. El conjunto producto Z × Z*

¿Tiene solución la ecuación

$$0 \times x = -9?$$

No, porque cualquier número multiplicado por 0, da 0. Luego la expresión — 9/0 no tiene sentido, no tiene solución. La división por cero es imposible. Debemos, pues, completar así la definición de fracción:

Fracción es un par de números enteros, el segundo de ellos no nulo, dados en un orden determinado.

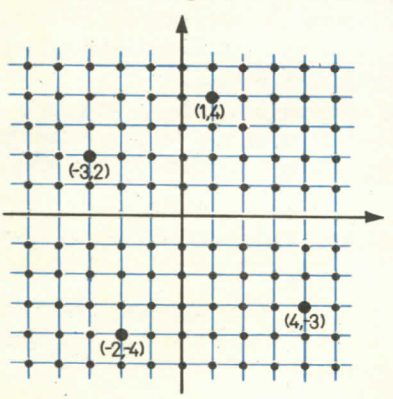
Si, como el curso pasado, llamamos Z al conjunto de los números enteros, designaremos con Z* a dicho conjunto con exclusión del cero.

$$Z^* = Z - 0$$

Entonces observa que todas **las fracciones son los elementos del conjunto producto Z × Z*.**

EJEMPLOS:

1. Representa gráficamente las fracciones, o sea, los elementos del conjunto producto Z × Z*.



Tomando en el eje de abscisas el conjunto Z y en el de ordenadas el conjunto Z*, todos los nudos de la red de paralelas a los dos ejes, exceptuando las del eje de abscisas, representan las fracciones.

En la figura hemos detallado los elementos (1, 4), (4, — 3), (— 3, 2), (— 2, — 4).

2. Expresa dichos pares como fracciones. Son

$$\frac{1}{4} \; ; \; \frac{4}{-3} \; ; \; \frac{-3}{2} \; ; \; \frac{-2}{-4}$$

25. La fracción es un cociente

Sea dividir 2 tartas entre 3 hermanos. Este cociente no es posible hallarlo exactamente por división, pues ésta no tendría fin. Veamos si podemos obtenerlo por medio de fracciones.

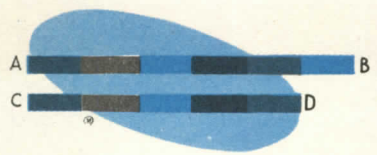
Para ello dividiremos cada tarta en 3 partes iguales, dando una a cada niño. Como son 2 tartas, cada hermano recibirá 2 trozos, o sea, 2 tercios de tarta. El quebrado $\frac{2}{3}$ representa el cociente exacto de dividir 2 entre 3.

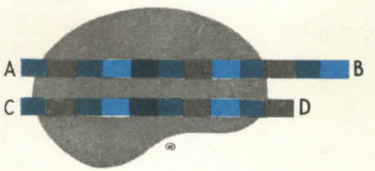
Una fracción puede considerarse como el cociente exacto de dividir su numerador por su denominador.

26. Las fracciones y el problema de la medida de cantidades

Supongamos que queremos medir el segmento AB tomando como unidad el segmento CD.

Vemos que la unidad no cabe un número entero de veces en AB. Cabe una vez, y sobra un trozo pequeño. Pero observamos que dividiendo la unidad en 5 partes iguales, cada una de ellas cabe exactamente en AB 6 veces.





Llamando **n** cada una de dichas partes, tenemos

$$AB = 6\,n;\quad CD = 5\,n$$

Si llamamos cociente de dos segmentos al cociente de sus medidas, resulta

$$\frac{AB}{CD} = \frac{6}{5}\ ;\quad AB = \frac{6}{5}\,CD$$

Decimos que la medida de AB, tomando CD como unidad, es la fracción $\frac{6}{5}$.

EJEMPLOS:

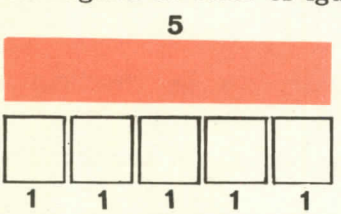
1. Dibuja un segmento MN y, por doblado, divídelo en 4 partes iguales. Toma el segmento MP, formado por 3 de dichas partes. ¿Cuál es la medida de MP tomando el segmento MN como unidad?

2. Dado un segmento *a*, divídelo por doblado o con el compás en 8 partes iguales. ¿Cuál es la medida de cada una de dichas partes, tomando el segmento *a* como unidad?

3. ¿Cuál es la medida de AB, tomando CD como unidad, en la figura 2.ª?

27. La fracción como operador

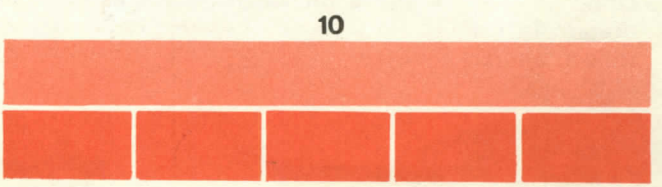
La regleta de color es igual a 5 regletas blancas. Diremos que la primera es el **quíntuplo** de la segunda o que la segunda es **un quinto** de la primera, lo que escribimos así



$$1 = \frac{1}{5} \times 5$$

Del mismo modo

$$2 = \frac{1}{5} \times 10$$



EJEMPLOS:

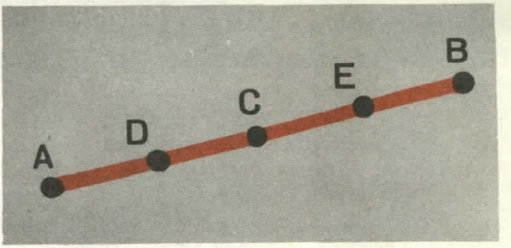
1. Completa

$$\frac{1}{5} \times 20 = \ldots\ ;\quad \frac{1}{5} \times 30 = \ldots\ ;\quad \frac{1}{5} \times 15 = \ldots$$

2. ¿Qué son dos regletas rojas respecto a la regleta naranja?

Son dos quintos, lo que escribimos

$$4 = \frac{2}{5} \times 10$$



Del mismo modo

$$\frac{3}{5} \times 10 = \ldots \quad ; \quad \frac{4}{5} \times 10 = \ldots \quad ; \quad \frac{2}{5} \times 5 = \ldots$$

3. Traza un segmento AB, y por doblado, divídelo en dos partes iguales, AC = CB, y luego cada parte, del mismo modo, en otras dos iguales.

Completa las siguientes igualdades:

$$CE = \frac{\ldots}{\ldots} \times AE \quad : \quad AE = \frac{\ldots}{\ldots} \times AB \quad ; \quad AD = \frac{\ldots}{\ldots} \times AC$$

En estos ejemplos la fracción funciona como *operador*, que *transforma unas cantidades* en otras. Así: la fracción $\frac{2}{5}$ transforma el número 10 en el 4; la fracción $\frac{3}{4}$, operando sobre el segmento AB, lo transforma en el AE.

$$AE = \frac{3}{4} \times AB$$

28. Lectura de una fracción

Si el denominador es un:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

las unidades fraccionarias se llaman: medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos, décimos.

Si pasa de 10, se añade al número la terminación **avo**. Así,

$$\frac{5}{12} \quad , \quad \frac{3}{25}$$

se leen: 5 doceavos, 3 veinticincoavos.

EJERCICIOS

1. *Di* qué fracción de semana representan 3 días, 5 días, 6 días. Qué fracción del año representan 2 meses, 7 meses, 8 meses, 11 meses. Qué fracción de peseta son 5, 7, 11 perras chicas. Qué fracción de día son 6 horas, 4 horas, 18 horas.

2. *Reduce* las fracciones siguientes a la unidad inferior, por ejemplo, horas a minutos:

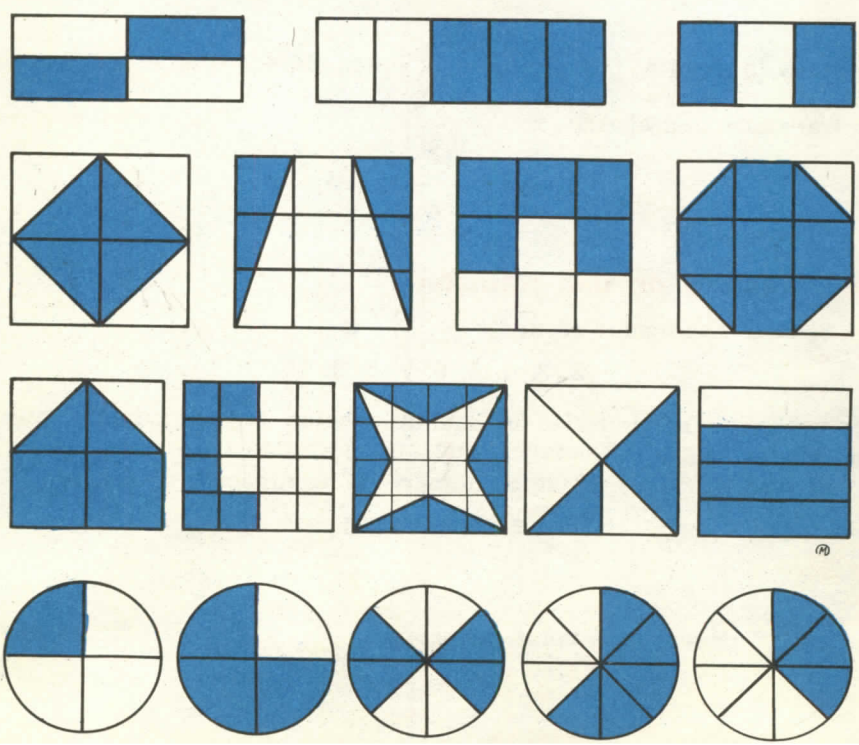
$\frac{11}{60}$ de hora ; $\frac{25}{60}$ de minuto ; $\frac{3}{12}$ de año

$\frac{3}{20}$ de peseta ; $\frac{4}{7}$ de semana ; $\frac{12}{30}$ de mes

$\frac{17}{5}$ de duro ; $\frac{5}{24}$ de día ; $\frac{7}{12}$ de año

Modelo: $\frac{17}{60}$ de minuto. Un minuto tiene 60 segundos; $\frac{1}{60}$ de minuto es 1 segundo. Luego $\frac{17}{60}$ de minuto son 17 segundos.

3. *Expresa* en forma de quebrado la parte coloreada de los siguientes gráficos:



4. ¿Qué parte del segmento AB representan los segmentos AP, AQ, AY, BR, BX y BZ?

5. Observando la figura, di: 1.º Qué parte de la tarta ha dado la mamá a cada uno de los tres niños; 2.º Qué parte de pera ha dado a cada uno; 3.º Qué parte de la tableta de chocolate ha dado a cada uno de los hermanos

mayores y qué parte ha dado al hermano pequeño; 4.º Qué parte del queso ha dado a cada uno; 5.º Qué parte de tarta queda sin repartir; 6.º Qué parte del queso no se ha repartido.

6. *Di* qué fracción de ángulo recto representan los ángulos de 30º, 12º 49º, 60º, 120º y 150º.

7. *Di* cuál es el numerador y cuál el denominador en las siguientes fracciones:

$$\frac{-2}{5}\ ;\ \frac{3}{7}\ ;\ \frac{5}{8}\ ;\ \frac{-3}{2}\ ;\ \frac{5}{3}\ ;\ \frac{2}{7}\ ;\ \frac{1}{-4}\ ;\ \frac{3}{4}$$

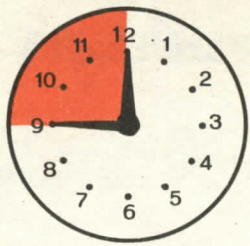
8. *Expresa* las siguientes fracciones en forma de parejas ordenadas:

$$\frac{3}{5}\ ;\ \frac{-4}{7}\ ;\ \frac{3}{8}\ ;\ \frac{5}{2}\ ;\ \frac{4}{-3}\ ;\ \frac{3}{7}\ ;\ \frac{-3}{5}\ ;\ \frac{2}{9}$$

9. *Expresa* como fracciones las siguientes parejas ordenadas:

(2, 3) ; (3, —5) ; (2, 7) ; (3, 4) ; (2, —11)
(7, —8) ; (6, 9) ; (3, —9) ; (7, 9) ; (8, 9)

10. *Di* cuál es el numerador y cuál el denominador en los siguientes ejemplos:



11. Si como $\frac{1}{4}$ de tarta, ¿cuánta queda?

12. ¿Qué hay que añadir a $\frac{1}{2}$ litro de vino para tener 1 litro?

13. Son las 2 y $\frac{1}{4}$. ¿Dentro de cuánto tiempo serán las tres?

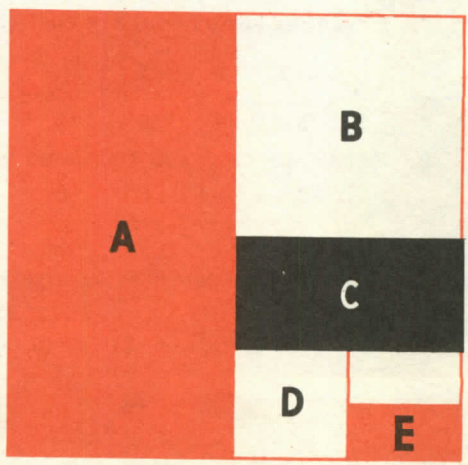
14. ¿Qué prefieres: $\frac{1}{2}$ kilogramo de caramelos ó 400 gramos de los mismos caramelos?

15. Cuánto vale $\frac{1}{2}$ de 32 metros?, ¿de 16 litros?, ¿de 10 kilogramos?

16. ¿Cuánto vale $\frac{1}{3}$ de 105 hectolitros?, ¿de 891 decámetros?, ¿de 117 metros?

17. Juan y Andrés encuentran 5 peras en un árbol abandonado, y se las reparten fraternalmente. ¿Cuánto le toca a cada uno?

18. ¿Qué parte del cuadrado total de la figura adjunta son los rectángulos A, B, C, D y E?



19. ¿Cuál es la parte de cada uno, cuando 12 pesetas se reparten entre 18, 24, 31 niños?

20. ¿Qué fracción de las birlas ha derribado Jaime? ¿Y qué fracción queda de pie?

Expresa en fracción de peseta:

21. El coste de 1 kg. de patatas, si 12 cuestan 18 pesetas.

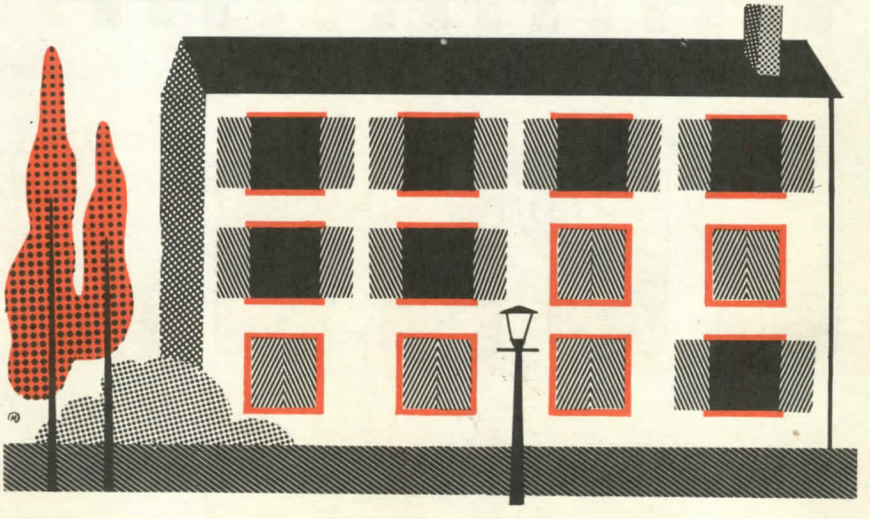
22. El coste de 1 lápiz, si 30 cuestan 25 pesetas.

23. El coste de 1 pluma, a 10 pesetas la gruesa (doce docenas).

24. El coste de 1 cuaderno, a 15 pesetas la docena.

25. En una explosión se han roto 4 de los 10 cristales de una ventana y 3 de los 7 cristales de un coche. ¿Qué fracción de los cristales de cada uno de ellos ha quedado intacta?

26. ¿Qué fracción de las ventanas están abiertas? ¿Y qué fracción quedan cerradas?



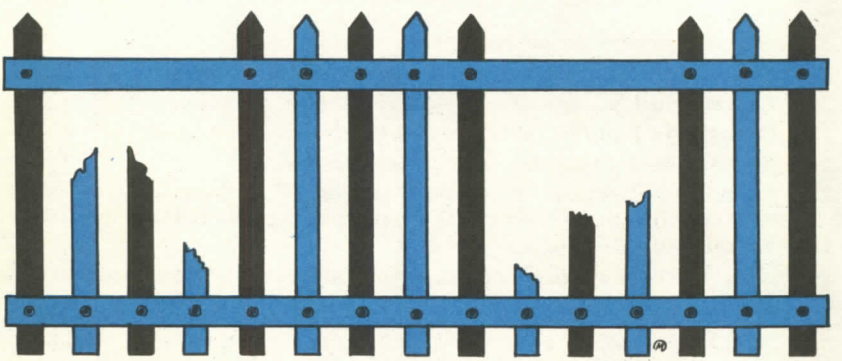
27. De una cesta de huevos se han roto 7 huevos, que son $\frac{1}{8}$ de los que había. ¿Cuántos huevos contenía la cesta? ¿Cuántos quedan?

28. Juan da los $\frac{3}{4}$ de sus bolas a sus compañeros y le quedan 22 bolas. ¿Cuántas poseía al principio?

29. De un tonel se sacan los $\frac{4}{5}$ del vino que contiene y quedan 52 litros. ¿Cuántos contenía al principio?

30. Matilde sale de casa con 84 ptas. Paga $\frac{1}{4}$ de esta cantidad en un medicamento que compra en la farmacia, y $\frac{1}{3}$ de la misma en la panadería. ¿Cuánto dinero lleva al volver a casa?

31. Calcula qué fracción de las tablas verticales se ha roto.



32. Halla la cabida de estas jarras:

6

El número racional

29. Igualdad de fracciones

Considera los cocientes exactos entre números enteros

$$\frac{12}{3} = 4 \quad ; \quad \frac{20}{5} = 4$$

Ambos son iguales, por lo que podemos escribir

$$\frac{12}{3} = \frac{20}{5} \qquad (1)$$

Ya que ambos miembros son números enteros, podemos aplicar las propiedades de los mismos. En particular, si multiplicamos los dos miembros por el mismo número, 3×5, producto de los divisores, resulta otra igualdad, o sea

$$\frac{12}{3} \times 3 \times 5 = \frac{20}{5} \times 3 \times 5$$

En virtud de las propiedades de los cocientes exactos, sabemos que la igualdad anterior puede escribirse así

$$\frac{12 \times 3 \times 5}{3} = \frac{20 \times 3 \times 5}{5}$$

y también $$12 \times 5 = 20 \times 3 \qquad (2)$$

o sea que los productos cruzados de los términos de la igualdad (1) son iguales.

Pues bien, convenimos en generalizar este resultado al caso de dos fracciones cualesquiera, definiendo:

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$, o elementos del conjunto $Z \times Z^*$, son

iguales si se tiene

$$a \times b' = a' \times b$$

o sea, cuando los productos cruzados son iguales.

Se expresa así

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow a \times b' = a' \times b \qquad (2')$$

EJEMPLO: ¿Son iguales las fracciones 2/3 y 16/24? ¿Por qué?

Son iguales, porque $2 \times 24 = 3 \times 16 = 48$.

30. Relación de equivalencia en el conjunto Z × Z *

La relación de igualdad de fracciones en (2') es efectivamente una relación de equivalencia en el conjunto $Z \times Z^*$, ya que es

1.º *Reflexiva:*

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}; \quad \text{ya que} \quad a \times b = b \times a$$

2.º *Simétrica:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

puesto que

$$a \times d = c \times b \Leftrightarrow c \times b = a \times d \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

3.º *Transitiva:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = c \times b$$

$$\frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Leftrightarrow c \times f = e \times d$$

Multiplicando ordenadamente las dos últimas igualdades entre enteros, resulta

$$a \times d \times c \times f = c \times b \times e \times d \;\; ; \;\; a \times f = b \times e = e \times b$$

lo que implica

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$$

31. Definición de número racional

La relación de equivalencia anterior hace una partición del conjunto $Z \times Z^*$ en **clases de equivalencia.** Cada una de dichas clases se denomina **número racional.**

Número racional es una fracción y todas sus equivalentes; o también *es la clase de todas las fracciones equivalentes entre sí.*

Al conjunto cociente $\frac{Z \times Z^*}{R}$, siendo R la relación de equivalencia dada en el número anterior, o sea, al conjunto de las clases de equivalencia, le llamaremos **conjunto Q de los números racionales.**

Un número racional viene definido por uno cualquiera de los representantes de su clase.

EJEMPLOS:

$$\alpha = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{16}{12} = \ldots = \left\{\frac{12}{9}\right\}$$

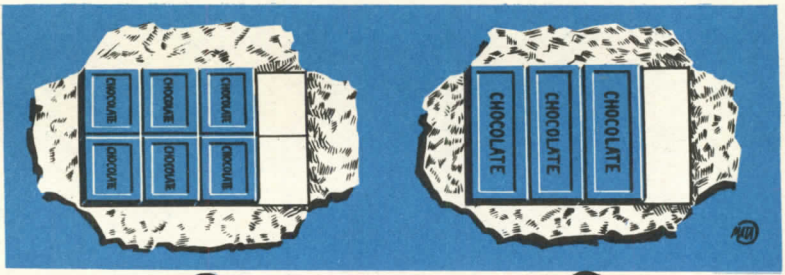
$$\beta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \frac{16}{20} = \frac{20}{25} = \ldots = \left\{\frac{8}{10}\right\}$$

$$\gamma = \frac{0}{5} = \frac{0}{6} = \frac{0}{7} = \frac{0}{10} = \ldots = \{0\}$$

Los números racionales, como los α , β y γ , se escriben poniendo entre llaves uno cualquiera de sus representantes. El número γ , cuyos representantes tienen todos cero por numerador es el número racional **cero.**

32. Propiedad fundamental de las fracciones

Juan recibe $\frac{6}{8}$ *de la tableta de chocolate de la izquierda, y Enri-*



$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

queta los $\frac{3}{4}$ *de la derecha. Pero ambos reciben igual cantidad de chocolate.*

Luego, al multiplicar cada término de la fracción $\frac{3}{4}$ por 2, su valor no varía, o sea:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8} \qquad (3)$$

Leyendo la igualdad (3) en sentido inverso, queda demostrado que al dividir los dos términos de una fracción por un mismo número, su valor no altera.

Si a los dos términos de una fracción se les multiplica o divide por el mismo número, la fracción que resulta es equivalente a la dada.

Es fácil demostrarlo.

Así:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad ; \quad \frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$$

En efecto, según la relación de equivalencia (2')

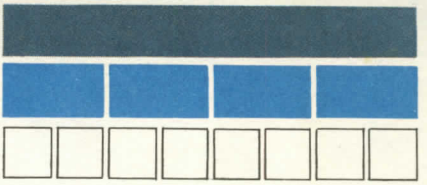
$$a \times b \times n = a \times n \times b \quad ; \quad a \times b : n = (a : n) \times b$$

EJEMPLOS:

1.º *¿Qué son tres regletas rojas respecto a una marrón?* Una regleta roja es un cuarto de la marrón, y tres regletas rojas son tres cuartos de la marrón, o sea,

$$6 = \frac{3}{4} \times 8$$

Pero tres regletas rojas equivalen a seis blancas, y cada una de éstas es un octavo de la marrón; las seis regletas blancas son seis octavos de la marrón, o sea,



$$6 = \frac{6}{8} \times 8$$

Por tanto,

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2}$$

2.º Escribe los primeros términos de la clase de fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \ldots$$

Di en cada caso por qué número has multiplicado los términos de la primera fracción.

33. Simplificar fracciones

Sea la fracción $\frac{60}{75}$

Por el número anterior

$$\frac{60}{75} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5},$$

dividiendo sucesivamente por 5 y por 3.

Hemos obtenido así una fracción equivalente a la dada, pero de términos más sencillos. Esta operación se llama **simplificar fracciones.**

Simplificar una fracción es convertirla en otra equivalente y de términos más sencillos. Para ello, se dividen sus dos términos por un mismo divisor de ambos.

EJEMPLO:

Simplifica la fracción $\frac{5}{10}$.

Solución: $\frac{5}{10} = \frac{5:5}{10:5} = \frac{1}{2}$

34. Representante canónico de un número racional

Dada la fracción $\frac{36}{48}$, ¿sabrías obtener otra equivalente, cuyos términos sean primos entre sí?

Bastará dividir ambos términos por su máximo común divisor, que es 12. Así:

$$\frac{36}{48} = \frac{36:12}{48:12} = \frac{3}{4}$$

La fracción $\frac{3}{4}$ que así se obtiene, no se puede simplificar más. Es la más sencilla de su clase. Se le llama **representante canónico** de la misma.

Como el razonamiento es general, resulta que **todo número racional tiene un representante cuyos términos son primos entre sí.** En efecto, basta dividir los dos términos de un representante cualquiera por su m. c. d.

Las fracciones cuyos términos son primos entre sí se llaman **irreducibles.** Las tomaremos como **representantes canónicos** de sus clases respectivas.

EJEMPLO:

Haz irreducible la fracción $\frac{75}{120}$

$$75 = 3 \times 5^2 \; ; \; 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$\text{m. c. d. } (74, 120) = 3 \times 5 = 15$$

$$\frac{75}{120} = \frac{75:15}{120:15} = \frac{5}{8}$$

35. Reducción de fracciones a común denominador

Dos números racionales siempre tienen representantes con el mismo denominador. En efecto, sean los números

$$\left\{\frac{a}{b}\right\} \text{ y } \left\{\frac{c}{d}\right\}$$

Pero

$$\frac{a}{b} = \frac{a\,d}{b\,d} \quad ; \quad \frac{c}{d} = \frac{c\,b}{d\,b}$$

Se ha multiplicado los dos términos de cada fracción por el denominador de la otra. Esta operación se denomina **reducir las fracciones a común denominador.**

EJEMPLOS:

1. *Luisa ha recibido* $\frac{1}{2}$ *del pastel y Margarita solamente* $\frac{1}{3}$. *¿Cómo reducir estas fracciones a común denominador?*

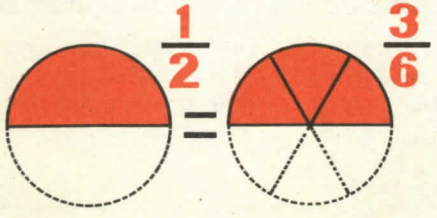
Basta dividir el pastel en un número de partes, igual al producto de los denominadores, en este caso $2 \times 3 = 6$.

Para reducir varias fracciones a común denominador se multiplican los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de las demás.

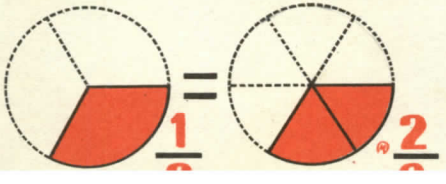
2. Reduce a común denominador las fracciones $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}$. Se obtiene:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 7 \times 8}{3 \times 7 \times 8} = \frac{112}{168} \quad ; \quad \frac{4}{7} = \frac{4 \times 3 \times 8}{7 \times 3 \times 8} = \frac{96}{168}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 3 \times 7}{8 \times 3 \times 7} = \frac{105}{168}$$



$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$$



$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$$

36. Reducción de fracciones a mínimo denominador común (M. D. C.)

De ordinario es conveniente que el denominador común sea el menor posible (M.D.C.) y entonces se procederá como en el siguiente

EJEMPLO:

Reducir a su mínimo denominador común (M.D.C.) *las fracciones:*

$$\frac{6}{16}\ ,\ \frac{15}{36}\ \text{y}\ \frac{18}{40}$$

Convirtiendo estas fracciones en irreducibles resulta:

$$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}\ ;\ \frac{15}{36}=\frac{5}{12}\ ;\ \frac{18}{40}=\frac{9}{20}$$

$$\text{m. c. m. } (8, 12, 20) = 2 \times 3 \times 5 = 120$$

Multipliquemos los dos términos de cada fracción por el cociente que resulta al dividir el m. c. m., 120, por su denominador

$$\frac{3}{8}=\frac{3\times 15}{8\times 15}=\frac{45}{120}\ ;\ \frac{5}{12}=\frac{5\times 10}{12\times 10}=\frac{50}{120}$$

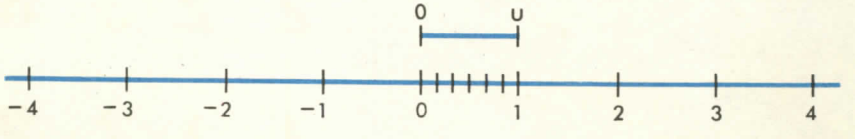
$$\frac{9}{20}=\frac{9\times 6}{20\times 6}=\frac{54}{120}$$

1.º Las fracciones así obtenidas son equivalentes a las fracciones dadas, porque hemos multiplicado los dos términos de cada una por un mismo número.

2.º Todas tienen el mismo denominador, 120, que es el menor posible.

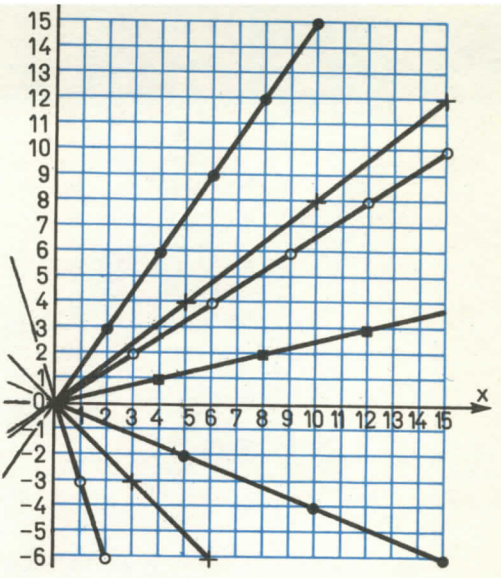
37. Representación geométrica de los números racionales

Sobre una recta tomemos un punto O como origen que represente el número {0}. Elijamos un segmento como unidad de longitudes, y llevémoslo sucesivamente tanto a derecha como a izquierda.



Los puntos de división representan los números enteros, los positivos a derecha y los negativos a izquierda.

Para representar las fracciones de denominador **n**, dividimos cada uno de los segmentos de longitud unidad en **n** partes iguales, y los puntos de división representan dichas fracciones. Variando **n**, obtenemos todos los números racionales. Dados dos de éstos, siempre el mayor está a derecha del menor.



38. Representación gráfica de las clases de equivalencia

Representemos el conjunto **Z** de los números enteros en cada uno de dos ejes perpendiculares, con origen común **O**. El conjunto producto $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ vendrá dado por los nudos del retículo de la figura. Dichos nudos, excluidos los situados sobre el eje **X'X**, representan el conjunto de las fracciones.

Las clases de equivalencia vienen dadas por las rectas que contienen los nudos alineados con el origen de coordenadas. Las fracciones irreducibles, o elementos canónicos, están representadas por los nudos de dichas rectas más próximos al origen de coordenadas.

EJERCICIOS

1. Escribe los primeros términos de la familia de parejas equivalentes a:

$$\frac{1}{3} \; ; \; \frac{3}{4} \; ; \; \frac{4}{7} \; ; \; \frac{2}{5} \; ; \; \frac{3}{8}$$

2. Halla otra fracción de términos más pequeños y equivalentes a:

$$1.^{o}\ \frac{2}{8} \; ; \; 2.^{o}\ \frac{3}{9} \; ; \; 3.^{o}\ \frac{4}{12} \; ; \; 4.^{o}\ \frac{6}{18}$$

$$5.^{o}\ \frac{15}{45} \; ; \; 6.^{o}\ \frac{7}{21} \; ; \; 7.^{o}\ \frac{5}{15}$$

Convierte en irreducibles las siguientes fracciones:

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*	*f)*
3.	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{7}{21}$
4.	$\frac{10}{15}$	$\frac{15}{10}$	$\frac{15}{3}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{15}{5}$	$\frac{5}{30}$
5.	$\frac{6}{15}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{20}{4}$	$\frac{8}{72}$
6.	$\frac{20}{30}$	$\frac{30}{20}$	$\frac{15}{35}$	$\frac{36}{63}$	$\frac{33}{63}$	$\frac{18}{27}$
7.	$\frac{21}{77}$	$\frac{30}{42}$	$\frac{33}{88}$	$\frac{56}{72}$	$\frac{72}{72}$	$\frac{36}{48}$

Reduce a común denominador los siguientes grupos de fracciones:

8. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$

9. $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{10}$

10. $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{12}$

11. $\frac{7}{24}$; $\frac{3}{8}$

12. $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{6}$

13. $\frac{2}{15}$; $\frac{3}{10}$

14. $\frac{10}{12}$; $\frac{20}{30}$

15. $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{12}$

16. $\frac{5}{7}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{14}$

17. $\frac{7}{18}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{11}{24}$

18. Reduce los siguientes grupos de fracciones a M.C.D.:

a) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{10}$

e) $\frac{7}{24}$; $\frac{3}{8}$

f) $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{6}$

g) $\frac{2}{15}$; $\frac{3}{10}$

h) $\frac{10}{12}$; $\frac{25}{30}$

i) $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{12}$

j) $\frac{5}{7}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{14}$

19. En las siguientes fracciones di cuál es mayor y cuál menor. (Reduce a M.C.D.)

a) $\frac{40}{56}$; $\frac{56}{72}$

b) $\frac{7}{36}$; $\frac{13}{48}$

c) $\frac{8}{21}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{1}{3}$

d) $\frac{3}{7}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{12}{35}$

e) $\frac{4}{21}$; $\frac{2}{6}$; $\frac{3}{14}$

f) $\frac{7}{12}$; $\frac{11}{20}$; $\frac{12}{15}$

20. Un estanque está lleno hasta sus $\frac{3}{4}$, y otro igual hasta sus $\frac{2}{3}$. ¿Cuál contiene mayor cantidad de agua?

21. El agua al congelarse aumenta su volumen en $\frac{1}{10}$ del mismo. ¿Qué volumen ocuparán 200 litros de agua después de helarse?

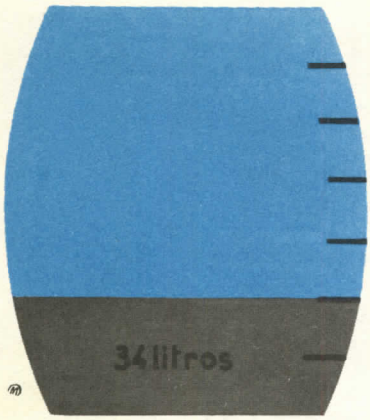
22. Al tostarse el café, éste pierde $\frac{1}{5}$ de su peso. Un comerciante tiene 80 Kg. de café verde. ¿Cuánto pesará éste después de tostarlo?

23. Un chico recibe $\frac{1}{5}$ de las manzanas de una caja, y otro recibe $\frac{1}{6}$ de las mismas. ¿Quién recibe mayor cantidad? Si la caja tiene 30 manzanas, ¿cuántas recibe cada chico?

24. Un labrador siega en un día $\frac{1}{7}$ de su finca. ¿Cuántos días tardará en segar toda la finca? ¿Cuánto ganará, si cobra 87 ptas. por día?

25. ¿Qué fracción del libro he estudiado, si estoy en la página 68, de las 208 que tiene el libro?

26. ¿Cuántas bolas tiene Martín en su bolsa si las que están fuera son $\frac{1}{9}$ de las de dentro?



27. En la mesa hay 5 comensales, cada uno de los cuales consume $\frac{1}{4}$ de litro de vino. ¿Cuánto consumen en total?

28. En cada 1.000 gramos de las monedas de 1 peseta hay 100 gramos de aluminio y 900 gramos de cobre. Expresa en fracción irreducible las cantidades de aluminio y cobre que hay en 1 gramo de dicha moneda.

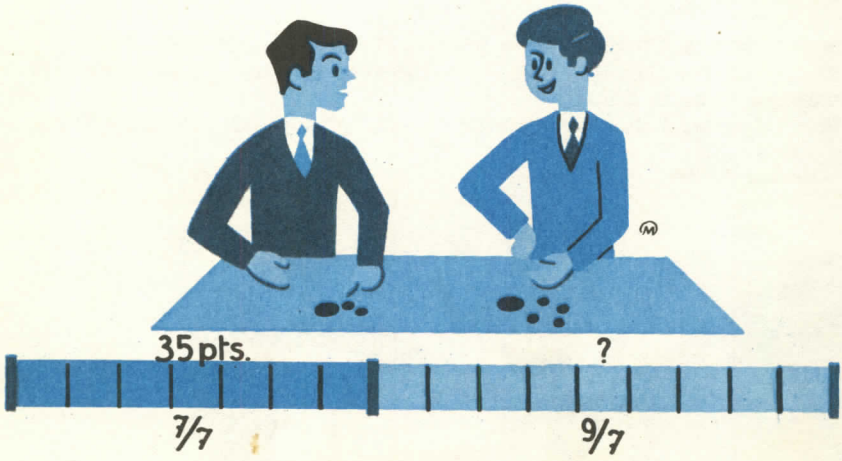
29. El mismo problema anterior para las monedas de 10 céntimos, que tienen 975 partes de aluminio y 25 de cobre.

30. De una vasija se han sacado los $\frac{5}{7}$ de su contenido, y quedan 34 litros. ¿Cuántos litros se retiraron?

31. Después de gastar los $\frac{2}{7}$ de mi dinero me quedan 45 pesetas. ¿Cuánto tenía al principio y cuánto gasté?

32. He comprado una bicicleta y he pagado al contado los $\frac{3}{4}$ de su importe, entregando 936 pesetas. ¿Cuál era el precio de la bicicleta?

33. Luis tiene 35 pesetas y Juan $\frac{2}{7}$ más que él. ¿Cuánto tiene Juan?



7

Adición de números racionales

39. Adición de fracciones

Ya que $\frac{15}{5}$ y $\frac{12}{3}$ son números enteros, podemos aplicar las propiedades de los mismos a la obtención de su suma, y escribir

$$\frac{15}{5}+\frac{12}{3}=\frac{15\times 3}{5\times 3}+\frac{12\times 5}{5\times 3}=\frac{15\times 3+12\times 5}{5\times 3}$$

El último paso es consecuencia de la propiedad distributiva de la división respecto a la adición entre enteros.

Parece, pues, lógico que definamos en general para dos fracciones cualesquiera

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}+\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{d}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{b}\times\mathbf{d}} \qquad (1)$$

La operación efectuada se llama **adición de fracciones.** Las dos fracciones dadas se llaman **sumandos,** y la fracción obtenida se denomina **suma** de las dos anteriores.

EJEMPLO:

Halla la suma de $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$.

Solución:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}$$

40. Propiedad uniforme de la adición de fracciones

Observa que $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$; $\frac{3}{8}=\frac{12}{32}$

Suma miembro a miembro estas dos igualdades:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{8}=\frac{16+9}{24}=\frac{25}{24}$$

$$\frac{4}{6}+\frac{12}{32}=\frac{4\times 32+6\times 12}{6\times 32}=\frac{128+72}{192}=\frac{200}{192}$$

Pero $\frac{200}{192}=\frac{25}{24}$, ya que $200\times 24=192\times 25=4.800$

Luego

$$\overset{\cdot 2}{\frac{2}{3}}+\frac{3}{8}=\frac{4}{6}+\frac{12}{32}$$

Esta propiedad es general: **sumando fracciones iguales se obtienen como resultados sumas iguales.**

Esta es la **propiedad uniforme de la adición de fracciones.**

EJEMPLOS:

1.º Suma miembro a miembro las igualdades

$$\frac{4}{5}=\frac{16}{20} \quad ; \quad \frac{2}{7}=\frac{6}{21}$$

y comprueba que las sumas obtenidas son iguales.

2.º Intenta demostrar que el resultado anterior es general, basándote en la definición (1) del párrafo 39 y en la (2') del párrafo 29. Así

$$\frac{4}{5}=\frac{16}{20}\Leftrightarrow 4\times 20=5\times 16\Rightarrow 4\times 20\times 7\times 21=5\times 16\times 7\times 21$$

$$\frac{2}{7}=\frac{6}{21}\Leftrightarrow 2\times 21=7\times 6\Rightarrow 2\times 21\times 5\times 20=7\times 6\times 5\times 20$$

Sumando miembro a miembro:

$$(4\times 7+2\times 5)\times 20\times 21=(16\times 21+6\times 20)\times 5\times 7$$

lo que implica que

$$\frac{4\times 7+2\times 5}{5\times 7}=\frac{16\times 21+6\times 20}{20\times 21}$$

o sea que

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{7}=\frac{16}{20}+\frac{6}{21}$$

41. Adición de números racionales

Hemos visto en el número anterior que la suma de dos fracciones es la misma tomando fracciones equivalentes a las dadas, o sea que si

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \quad ; \quad \frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$$

se verifica que

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'} \qquad (2)$$

Este resultado nos permite definir:

Suma de dos números racionales $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ **y** $\left\{\frac{c}{d}\right\}$ **es el número racional** $\left\{\frac{a\,d+bc}{b\,d}\right\}$ y la igualdad (2) expresa la **propiedad uniforme de la adición de números racionales,** que dice:

La suma de números racionales es independiente de los representantes elegidos para realizarla.

EJEMPLOS:

1.º Ya que la suma de los números racionales es independiente de los representantes elegidos, comprueba que lo más sencillo es realizar la adición mediante los representantes de igual denominador (núm. 35).

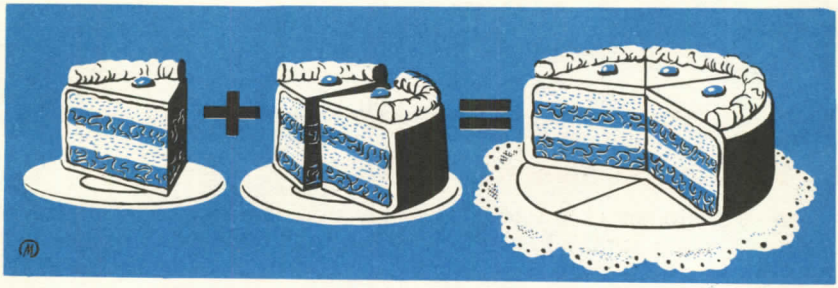
Solución: En efecto

$$\left\{\frac{a}{n}\right\}+\left\{\frac{b}{n}\right\}=\left\{\frac{a\,n+b\,n}{n\times n}\right\}=\left\{\frac{a+b}{n}\right\}$$

Por tanto, operando con los representantes de igual denominador, **basta sumar los numeradores y dejar el mismo denominador anterior.**

2.º Suma las fracciones 4/3 y 10/3

$$\frac{4}{3}+\frac{10}{3}=\frac{14}{3}$$



$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

42. Práctica de la adición de fracciones que tienen igual denominador

Luis ha recibido $\frac{1}{5}$ *de una tarta y su hermana Pepita ha recibido* $\frac{2}{5}$ *de la misma; ¿cuánto recibieron entre los dos?*

Habrán recibido:

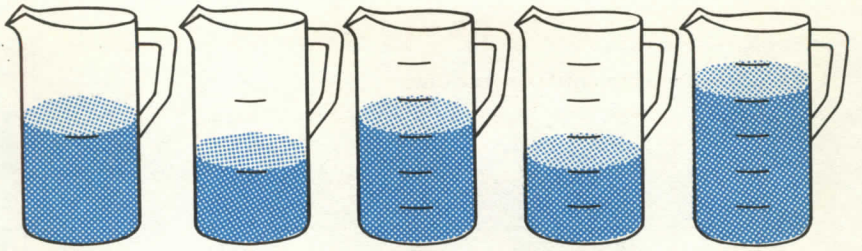
$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 1 \text{ quinto} + 2 \text{ quintos} = (1 + 2) \text{ quintos} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5}$$

Para sumar fracciones que tienen el mismo denominador, se suman los numeradores, conservando el mismo denominador.

Así,

$$\frac{16}{25} + \frac{7}{25} + \frac{3}{25} = \frac{16+7+3}{25} = \frac{26}{25}$$

Conviene expresar los resultados en forma irreducible.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

43. Práctica de la adición de fracciones que tienen distinto denominador

Luis tiene $\frac{1}{2}$ *de la jarra de naranjada, y Pepito solamente* $\frac{1}{3}$.

¿Cuánto tienen entre los dos?

Los quebrados ahora tienen distinto denominador. Pero se reducen a común denominador, y entonces sí pueden sumarse aplicando la regla anterior.

Para sumar fracciones que tienen distinto denominador, se reducen a común denominador y luego se aplica la regla anterior.

Para sumar números compuestos de parte entera y parte fraccionaria, a los que se llama **números mixtos,** se suma aparte la parte entera y la parte fraccionaria.

44. Representación gráfica de la adición de números racionales

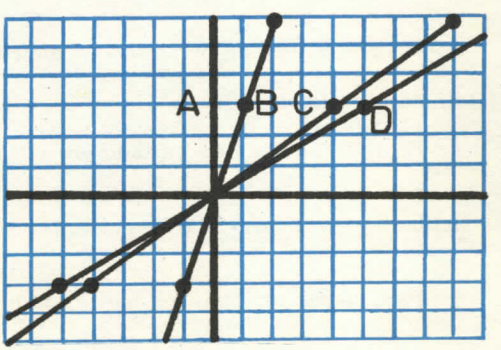
Sean B (1, 3), y C (4, 3). Sabemos que

$(1, 3) + (4, 3) = (5, 3)$

que viene representado por el punto D.

Basta sumar los segmentos

$AB + AC = AC + CD = AD$



EJERCICIOS

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$; $\frac{5}{7}+\frac{1}{7}$; $\frac{6}{11}+\frac{4}{11}$; $\frac{7}{8}+\frac{3}{8}$

b) $\frac{7}{12}+\frac{5}{12}$; $\frac{4}{13}+\frac{2}{13}$; $\frac{5}{11}+\frac{3}{11}$; $\frac{7}{15}+\frac{2}{15}$

c) $\frac{5}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}$; $\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}$; $\frac{2}{7}+\frac{5}{7}+\frac{4}{7}$

d) $\frac{2}{11}+\frac{5}{11}+\frac{3}{11}$; $\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}$; $\frac{7}{11}+\frac{2}{11}+\frac{3}{11}$

e) $\frac{5}{6}+\frac{1}{6}$; $\frac{5}{18}+\frac{2}{9}$; $\frac{8}{9}+\frac{2}{27}$; $\frac{16}{25}+\frac{3}{5}$

f) $\frac{7}{12}+\frac{11}{24}$; $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}+\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}$

g) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$

h) $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{12}$; $\frac{5}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{2}$

i) $\frac{8}{21}+\frac{2}{7}+\frac{1}{3}$; $\frac{3}{7}+\frac{2}{5}+\frac{2}{35}$

2. ¿Cuál es la altura de una casa que consta de un sótano de $\frac{17}{5}$ metros, de una planta baja de $\frac{14}{5}$ metros y de un piso de $\frac{25}{7}$ metros?

3. Un poste tiene enterrados $\frac{7}{4}$ metros y emerge del suelo $\frac{37}{5}$ metros. ¿Qué longitud tiene el poste?

4. En una familia han gastado en una semana $\frac{82}{5}$ litros de leche, y en la siguiente $\frac{79}{4}$ litros. Cuál es el gasto total de la quincena?

5. Para hacer un traje se han gastado $\frac{13}{4}$ metros de tela, y para un

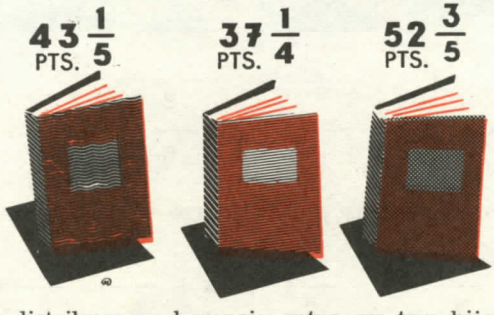
abrigo $\frac{12}{5}$ metros. ¿Cuántos metros de tela se han gastado en total?

6. Un grifo da $\frac{32}{5}$ litros de agua por minuto, y otro da $\frac{13}{3}$ litros por minuto. ¿Cuánto dan entre los dos juntos?

7. Andrés haría un trabajo él solo en 3 horas. Alberto emplearía 6 horas en el mismo trabajo. ¿Qué parte del trabajo hace cada uno en una hora? ¿Qué parte del trabajo hacen los dos juntos en una hora? ¿Cuánto tardarían en hacer la obra trabajando los dos juntos?

8. Para el traje de un colegial se han necesitado las siguientes cantidades de paño: para el pantalón, $\frac{7}{8}$ de metro; para la americana, $\frac{29}{20}$ metros, y $\frac{15}{4}$ m. para el abrigo. ¿Qué cantidad de paño se ha empleado?

9. Con los datos del gráfico adjunto plantea un problema y resuélvelo.



10. Un padre distribuye su herencia entre sus tres hijos. El primero recibe $\frac{53}{5}$ hectáreas, el segundo $\frac{51}{4}$ hectáreas y el tercero $\frac{67}{6}$ hectáreas. Calcular el área total de sus propiedades.

11. La diferencia de dos números es de 94/5. El menor es 31/4. ¿Cuál es el mayor?

8

Propiedades de la adición de números racionales

45. Propiedad conmutativa

Sean $\frac{a}{n}$ y $\frac{b}{n}$ los representantes de igual denominador de dos números racionales. En virtud de la propiedad conmutativa de los números enteros se tiene

$$\left\{\frac{a}{n}\right\} + \left\{\frac{b}{n}\right\} = \left\{\frac{a+b}{n}\right\} = \left\{\frac{b+a}{n}\right\} = \left\{\frac{b}{n}\right\} + \left\{\frac{a}{n}\right\}$$

lo que demuestra que

El orden de los sumandos no altera la suma de números racionales.

EJEMPLOS:

1.º Comprueba que $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{3}{4}$.

2.º Sustituye las letras por números para que se verifique

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{7} = x + \frac{3}{8} \quad ; \quad x + \frac{2}{9} = \frac{2}{9} + \frac{8}{11}$$

46. Propiedad asociativa

Sean $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$ y $\frac{c}{n}$ los representantes de igual denominador

de tres números racionales. En virtud de la propiedad asociativa de los números enteros, se tiene

$$\left[\left\{\frac{a}{n}\right\}+\left\{\frac{b}{n}\right\}\right]+\left\{\frac{c}{n}\right\}=\left\{\frac{(a+b)+c}{n}\right\}=$$

$$=\left\{\frac{a+(b+c)}{n}\right\}=\left\{\frac{a}{n}\right\}+\left[\left\{\frac{b}{n}\right\}+\left\{\frac{c}{n}\right\}\right]$$

lo que demuestra la **propiedad asociativa**

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$$

EJEMPLOS:

1.º Comprueba que

$$\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}=\frac{2}{7}+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right)$$

2.º ¿Qué valor puede sustituir a las letras para que sea cierta la igualdad

$$\left(\frac{2}{3}+x\right)+\frac{1}{8}=\frac{2}{3}+\left(x+\frac{1}{8}\right)\ ?$$

47. Elemento neutro

En el conjunto Q de los números racionales consideremos el elemento $\left\{\frac{o}{n}\right\}$, al que se llama **cero,** o **elemento nulo.** Se cumple que

$$\left\{\frac{a}{n}\right\}+\left\{\frac{o}{n}\right\}=\left\{\frac{a+o}{n}\right\}=\left\{\frac{a}{n}\right\}$$

Cualquier número racional sumado con el elemento cero, da como resultado el mismo número racional.

Por esta propiedad al número racional cero se le llama **elemento neutro** de la adición de números racionales.

EJEMPLOS:

1.º En un sistema de ejes de coordenadas, ¿dónde viene representado el número racional cero?

2.º Halla las sumas

$$\frac{5}{8}+0 \quad ; \quad 0+\frac{7}{9}$$

48. Elemento opuesto

Dado un número racional por un representante (a, b), existe siempre otro número racional representado por el par (—a, b), al que llamaremos **opuesto** del primero. Se cumple esta propiedad

$$\left\{\frac{a}{b}\right\}+\left\{\frac{-a}{b}\right\}=\left\{\frac{a+(-a)}{b}\right\}=\left\{\frac{o}{b}\right\}=0$$

Cualquier número racional sumado con su opuesto nos da como resultado el número racional cero.

EJEMPLOS:

1.º *Halla el opuesto del número racional* $[3/5] = \alpha$. *Lo representamos por* $-\alpha$. *Comprueba que* $\alpha + (-\alpha) = 0$.

Solución:

$$-\alpha = [-3/5]$$

$$\alpha+(-\alpha)=\left\{\frac{3}{5}\right\}+\left\{\frac{-3}{5}\right\}=\left\{\frac{0}{5}\right\}=0$$

2.º *Halla el opuesto de* $\beta = \{-8/11\}$. *Lo representamos por* $-\beta$. *Comprueba que* $\beta + (-\beta) = 0$.

Solución:

$$-\beta = \{8/11\}$$

$$\beta+(-\beta)=\left\{\frac{-8}{11}\right\}+\left\{\frac{8}{11}\right\}=\left\{\frac{0}{11}\right\}=0$$

49. Grupo aditivo

En virtud de las propiedades anteriores deducimos que **el conjunto Q de los números racionales tiene la estructura de grupo aditivo conmutativo.**

EJERCICIOS

Efectúa las siguientes adiciones:

1. $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$
2. $\frac{5}{21} + \frac{1}{7}$
3. $\frac{7}{8} + \frac{1}{4}$
4. $\frac{4}{9} + \frac{1}{5}$
5. $\frac{13}{15} + \frac{7}{10}$
6. $\frac{11}{12} + \frac{13}{16}$
7. $\frac{3}{5} + \frac{7}{8}$
8. $\frac{3}{5} + \frac{9}{10}$
9. $\frac{7}{48} + \frac{5}{12}$
10. $\frac{2}{7} + \frac{1}{4}$
11. $\frac{6}{7} + \frac{1}{15}$
12. $\frac{1}{90} + \frac{4}{15}$
13. $\frac{2}{5} + \frac{5}{7}$
14. $\frac{9}{2} + \frac{6}{8}$
15. $\frac{10}{3} + \frac{1}{9}$
16. $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$
17. $\frac{3}{2} + \frac{1}{3}$
18. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$
19. $\frac{5}{9} + \frac{7}{9}$
20. $\frac{1}{16} + \frac{15}{16}$
21. $\frac{5}{16} + \frac{1}{2}$
22. $\frac{3}{11} + \frac{9}{22}$
23. $\frac{3}{7} + \frac{7}{9}$
24. $\frac{17}{28} + \frac{27}{35}$

25. Lee las siguientes fracciones:

$$\frac{2}{15}, \frac{14}{13}, \frac{7}{29}, \frac{57}{39}, \frac{24}{47}, \frac{53}{41}, \frac{75}{53}, \frac{88}{101}$$

26. Enumera diez fracciones con denominador 25.

27. Di cuál es mayor:

7 naranjas ó $\frac{17}{2}$ naranjas; 4 tartas ó $\frac{9}{2}$ tartas

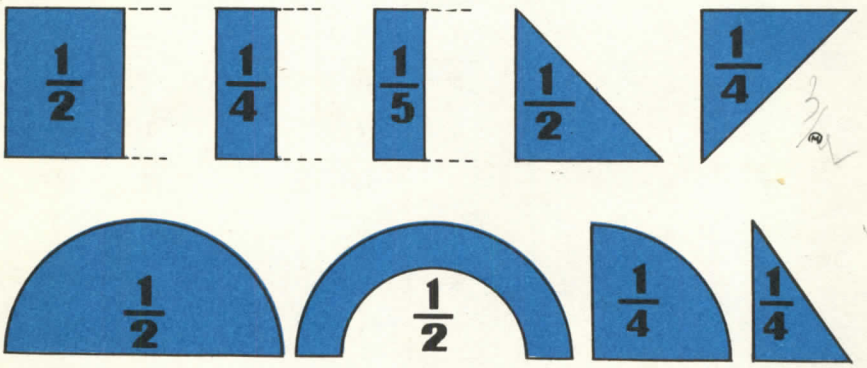
15 peras ó $\frac{47}{3}$ peras; 9 m ó $\frac{19}{3}$ m ; 8 cm ó $\frac{35}{4}$ cm

28. Calcula rápidamente:

$\frac{1}{2}$ de 6 manzanas ; $\frac{1}{4}$ de 16 bolas ; $\frac{1}{7}$ de 56 naranjas

$\frac{1}{5}$ de 75 peras ; $\frac{1}{10}$ de 80 lápices ; $\frac{1}{12}$ de 72 libros

29. En los siguientes gráficos dibuja la unidad completa:



Halla la suma de las fracciones:

30. $\frac{9}{12} + \frac{2}{36} + \frac{3}{18}$

31. $\frac{10}{11} + \frac{7}{22} + \frac{8}{33}$

32. $\frac{2}{7} + \frac{48}{49} + \frac{13}{14}$

33. $\frac{3}{5} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6}$

34. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{9}{11}$

35. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

36. $\frac{5}{11} + \frac{7}{8} + \frac{2}{5}$

37. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$

38. $\frac{7}{12} + \frac{3}{24} + \frac{7}{15}$

39. $\frac{5}{12} + \frac{8}{15} + \frac{9}{16} + \frac{2}{7}$

9

Sustracción de números racionales

50. Definición

Sustracción de dos números racionales α y β, llamados **minuendo** y **sustraendo,** respectivamente, es la operación que tiene por objeto hallar otro número racional γ, llamado **diferencia,** tal que sumando al sustraendo β nos dé el minuendo α, o sea

$$\alpha - \beta = \gamma \Leftrightarrow \beta + \gamma = \alpha \Leftrightarrow \alpha - \gamma = \beta \qquad (1)$$

Las tres igualdades (1) se llaman **equivalencias fundamentales** de la sustracción: si una es cierta, lo son igualmente las otras dos. Si una cualquiera de ellas es falsa, lo son igualmente las otras dos.

EJEMPLOS:

1. *Dada la igualdad*

$$\left\{\frac{3}{4}\right\} + \left\{\frac{2}{4}\right\} = \left\{\frac{5}{4}\right\}$$

halla las dos equivalentes a ella.

2. *Resuelve la ecuación*

$$x - \left\{\frac{2}{5}\right\} = \left\{\frac{1}{7}\right\}$$

aplicando las equivalencias fundamentales.

Solución:

$$x = \left\{\frac{2}{5}\right\} + \left\{\frac{1}{7}\right\} = \left\{\frac{14}{35}\right\} + \left\{\frac{5}{35}\right\} = \left\{\frac{19}{35}\right\}$$

51. Cálculo de la diferencia de dos números racionales

Llamamos **x** la diferencia

$$\left\{\frac{3}{7}\right\} - \left\{\frac{1}{7}\right\} = x$$

Según la definición

$$x + \left\{\frac{1}{7}\right\} = \left\{\frac{3}{7}\right\}$$

Sumemos $\left\{\frac{-1}{7}\right\}$ a los dos miembros. Resulta

$$x + \left\{\frac{1}{7}\right\} + \left\{\frac{-1}{7}\right\} = \left\{\frac{3}{7}\right\} + \left\{\frac{-1}{7}\right\}$$

Pero

$$x + \left\{\frac{1}{7}\right\} + \left\{\frac{-1}{7}\right\} = x + 0 = x$$

Luego queda

$$x = \left\{\frac{3}{7}\right\} + \left\{\frac{-1}{7}\right\} = \left\{\frac{3-1}{7}\right\} = \left\{\frac{2}{7}\right\}$$

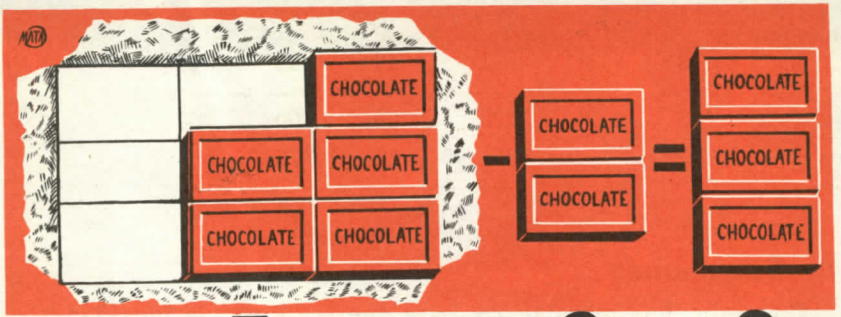
Para restar dos números racionales se suma al minuendo el opuesto al sustraendo.

De este modo la sustracción de números racionales se reduce a la adición, y no es operación distinta de ella.

Por tanto, la sustracción de números racionales es siempre posible, lo mismo que la adición, y tiene sus mismas propiedades.

52. Práctica de la sustracción de fracciones que tienen el mismo denominador

Luis tiene $\frac{5}{9}$ *de una tableta de chocolate y da a su hermana* $\frac{2}{9}$, *¿cuánto le queda?*



$$\frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{3}{9}$$

Le quedará:

$$\frac{5}{9} - \frac{2}{9} = 5 \text{ novenos} - 2 \text{ novenos} = (5 - 2) \text{ novenos} =$$

$$= \frac{5-2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Para restar fracciones que tienen el mismo denominador, se restan los numeradores, conservando el mismo denominador.

53. Práctica de la sustracción de fracciones que tienen distinto denominador

Sea restar $\frac{2}{3} - \frac{1}{5}$.

Reduciendo estas fracciones a común denominador, queda:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} - \frac{1 \times 3}{3 \times 5} = \frac{10}{15} - \frac{3}{15} =$$

$$= \frac{10-3}{15} = \frac{7}{15}$$

Para restar fracciones que tienen distinto denominador, se reducen a común denominador, y luego se aplica el caso anterior.

EJEMPLO:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}=\frac{40}{60}+\frac{45}{60}-\frac{12}{60}=$$

$$=\frac{40+45-12}{60}=\frac{73}{60}$$

54. Ecuaciones

¿Qué valor hay que dar a **x** para que sea cierta la igualdad

$$-\frac{2}{5}+x=\frac{3}{2}\ ?$$

La letra **x**, cuyo valor hay que hallar, se llama **incógnita.** La igualdad que contiene una incógnita se llama **ecuación. Resolver** una ecuación es hallar el valor de la incógnita. En nuestro caso tenemos

$$-\frac{2}{5}+x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{2}-\left(-\frac{2}{5}\right)=x$$

Luego

$$x=\frac{3}{2}-\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{2}+\frac{2}{5}=\frac{15+4}{10}\ \frac{19}{10}$$

El número $\frac{19}{10}$ se llama **raíz** o **solución** de la ecuación. Es el valor que, sustituido en lugar de la incógnita, satisface a dicha ecuación.

Como ves, para resolver ecuaciones basta aplicar las equivalencias fundamentales.

55. Trasposición de términos

Sea la igualdad

$$\alpha-\beta=\gamma$$

donde α, β y γ son números racionales. Sabemos que la igualdad anterior equivale a

$$\alpha=\beta+\gamma$$

o también a

$$\alpha-\gamma=\beta$$

Es decir, que el número β, que estaba en el primer miembro restando, pasa al segundo sumando; y el número γ, que estaba en el segundo miembro sumando, pasa al primer miembro restando.

Esta operación de pasar un número de un miembro a otro se llama **trasposición de términos.**

En una igualdad se puede trasponer un término de un miembro a otro, cambiándole el signo que le precede.

EJEMPLOS:

1.º Resolver la ecuación $x + \frac{1}{3} = -\frac{2}{5}$. Despejando la incógnita, mediante la trasposición de términos

$$x = -\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{-11}{15}$$

2.º Resolver la ecuación $\frac{6}{5} - x = \frac{-8}{5}$.

Trasponiendo términos

$$\frac{6}{5} + \frac{8}{5} = x \quad ; \quad x = \frac{14}{5}$$

EJERCICIOS

Efectúa las siguientes sustracciones, restando:

1. $\frac{1}{3}$ de $\frac{15}{24}$
2. $\frac{9}{20}$ de $\frac{14}{15}$
3. $\frac{173}{84}$ de $\frac{317}{36}$
4. $\frac{32}{9}$ de $\frac{49}{6}$
5. $\frac{2}{3}$ de $\frac{8}{9}$
6. $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$
7. $\frac{2}{25}$ de $\frac{3}{5}$
8. $\frac{3}{10}$ de $\frac{20}{30}$
9. $\frac{23}{4}$ de $\frac{17}{2}$
10. $\frac{1}{7}$ de $\frac{1}{6}$
11. $\frac{2}{5}$ de $\frac{29}{30}$
12. $\frac{26}{3}$ de $\frac{75}{8}$
13. $\frac{13}{2}$ de $\frac{29}{4}$
14. $\frac{1}{20}$ de $\frac{7}{30}$
15. $\frac{2}{11}$ de $\frac{21}{22}$
16. $\frac{3}{7}$ de $\frac{13}{14}$
17. $\frac{243}{16}$ de $\frac{167}{8}$
18. $\frac{25}{4}$ de $\frac{22}{3}$

19. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{7}{5} + \frac{12}{5} - \frac{3}{5}$; $\frac{5}{8} + \frac{17}{8} - \frac{7}{8}$

b) $\frac{9}{7} + \frac{8}{7} - \frac{12}{7}$; $\frac{7}{16} - \frac{5}{16} + \frac{13}{16}$

c) $\frac{9}{11} - \frac{3}{11} + \frac{16}{11}$; $\frac{15}{4} - \frac{9}{4} - \frac{3}{4}$

20. Sigue el vuelo del avión:

$\frac{8}{7} + \frac{6}{7} - \frac{11}{7} + \frac{5}{7} + \frac{9}{7} - \frac{3}{7} + \frac{13}{7} - \frac{8}{7}$

$\frac{9}{5} - \frac{3}{5} + \frac{16}{5} + \frac{8}{5} - \frac{13}{5} - \frac{7}{5} + \frac{12}{5} - \frac{6}{5}$

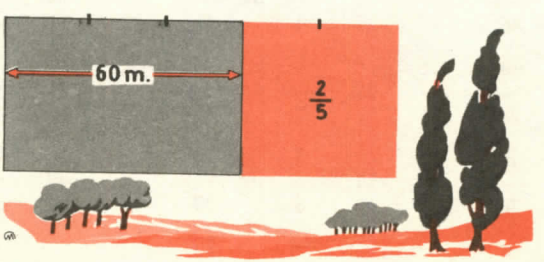
$\frac{17}{3} + \frac{13}{3} - \frac{11}{3} + \frac{16}{3} - \frac{8}{3} - \frac{7}{3} + \frac{19}{3}$

21. Halla el valor de:

$\frac{3}{4}$ de 20 pesetas; $\frac{2}{5}$ de 25 duros; $\frac{3}{8}$ de 32 días

$\frac{2}{7}$ de 21 años; $\frac{5}{7}$ de 35 kilos; $\frac{2}{9}$ de 18 obreros

22. Calcula la longitud del campo:



23. ¿En cuánto excede $\frac{7}{8}$ a $\frac{7}{12}$?

24. Un obrero gana diariamente $\frac{682}{5}$ pesetas y gasta $\frac{453}{4}$ pesetas por día. ¿Cuánto ahorra diariamente?

25. Juanito tiene 16 pesetas y gasta $\frac{35}{4}$ pesetas. ¿Cuánto le queda?

26. De un montón de cromos Margarita ha regalado primero $\frac{1}{7}$, después $\frac{1}{4}$. ¿Qué fracción de los cromos le queda todavía?

27. Un sastre tiene una pieza de tela de $\frac{100}{3}$ metros. Gasta primero $\frac{39}{4}$ y más tarde $\frac{37}{5}$ metros. ¿Cuántos metros quedan?

28. Se venden primero $\frac{7}{11}$, luego $\frac{1}{5}$ del vino de un tonel. ¿Qué fracción del vino queda en el tonel?

29. Los $\frac{2}{3}$ de una finca se han sembrado de trigo, y $\frac{1}{4}$ de patatas. ¿Qué parte queda para el maíz?

30. Margarita ha recibido los $\frac{2}{5}$ de un pastel, Pablito ha recibido $\frac{1}{4}$ del mismo. ¿Qué parte del pastel queda por repartir?

31. Me toca en herencia $\frac{2}{3}$ de una fábrica, y compro $\frac{1}{4}$ de ella. ¿Qué parte de la fábrica debo adquirir todavía si deseo poseerla toda?

32. Un obrero se compromete a realizar un trabajo en 15 días; otro, en 18 días, y un tercero en 20 días. Si trabajasen juntos, ¿qué parte de la obra harían en un día?

33. Un comerciante ha vendido los $\frac{3}{5}$, luego los $\frac{3}{8}$ de un bocal de caramelos. ¿Qué parte le queda?

34. Una obrera hace 6 metros de encaje en 8 días. Otra hace 7 metros en 9 días. Decir: 1.º ¿Cuál es la más hábil? 2.º ¿Qué cantidad de encaje hace por día de más que la otra?

35. Se divide un prado en tres partes: la primera es los $\frac{2}{5}$ y la segunda $\frac{1}{4}$ del prado. ¿Cuál es la mayor de las tres y cuánto sobrepasa a la siguiente?

36. ¿Qué hay que añadir a $\frac{4}{7}$ para tener $\frac{2}{3}$?

37. La diferencia de dos fracciones es $\frac{9}{4}$. La menor es $\frac{5}{6}$. ¿Cuál es la mayor?

38. ¿A qué fracción faltan $\frac{2}{3}$ para ser igual a $\frac{19}{21}$?

39. ¿En cuánto aumenta la fracción $\frac{7}{4}$ cuando al numerador se le suma el denominador 4?

40. ¿En cuánto aumenta la fracción $\frac{13}{21}$ cuando se añade 3 a sus dos términos? ¿En cuánto disminuye cuando se resta 7 a sus dos términos?

41. Un tonel contiene $\frac{937}{7}$ litros de vino. Una semana se extraen $\frac{131}{4}$ litros y la siguiente $\frac{344}{7}$ litros. ¿Cuántos litros quedan?

42. ¿Qué número hay que sumar a $\frac{8}{37}$ para que nos dé $\frac{17}{23}$?

43. Un albañil que debía embaldosar $\frac{687}{5}$ m², hizo en 3 días $\frac{431}{8}$ m². ¿Cuántos m² le faltan para terminar?

10

Multiplicación de los números racionales

56. Definición

Siendo $\frac{56}{7}$ y $\frac{45}{5}$ números enteros, por ser los cocientes exactos, sabemos que para dividir el producto de dos enteros $\frac{56}{7} \times 45$ por otro número entero, 5, se divide uno cualquiera de los dos factores, por ejemplo el segundo, por dicho número, o sea

$$\frac{\frac{56 \times 45}{7}}{5} = \frac{\frac{56}{7} \times 45}{5} = \frac{56}{7} \times \frac{45}{5} \qquad (1)$$

También sabemos que al multiplicar el divisor, 7, de $\frac{56 \times 45}{7}$, por un número, 5, el cociente queda dividido por dicho número, o sea

$$\frac{56 \times 45}{7 \times 5} = \frac{\frac{56 \times 45}{7}}{5} \qquad (2)$$

De (1) y (2) deducimos que

$$\frac{56}{7} \times \frac{45}{5} = \frac{\frac{56}{7} \times 45}{5} = \frac{\frac{56 \times 45}{7}}{5} = \frac{56 \times 45}{7 \times 5}$$

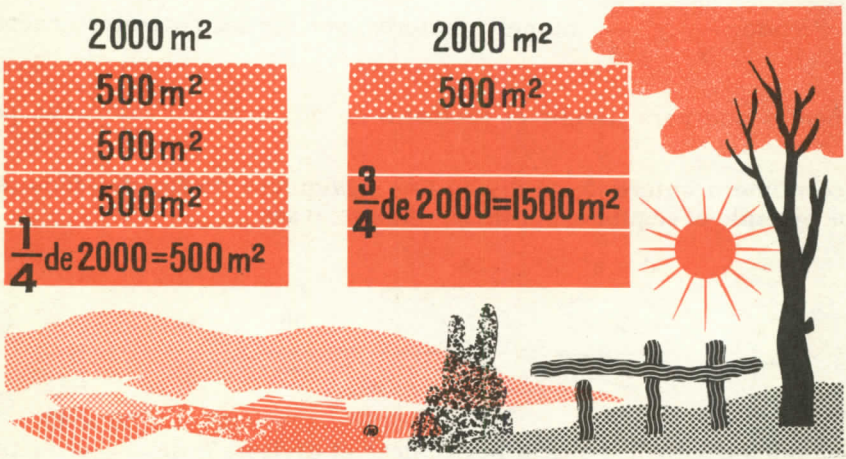
Parece, por tanto, lógico que definamos de un modo general para cualesquiera fracciones

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad (3)$$

Al resultado de la multiplicación se llama **producto.**

57. Multiplicación de una fracción por un entero

Un campo tiene 2.000 m². ¿Cuántos metros cuadrados tiene $\frac{1}{4}$ *del campo?; ¿y* $\frac{3}{4}$ *del campo?*



Así como tomar el cuádruplo de un número es multiplicarlo por 4, así tomar un cuarto del número es multiplicarlo por $\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{4} \text{ de } 2.000 = \frac{1}{4} \times 2.000$$

$$\frac{3}{4} \text{ de } 2.000 = \frac{3}{4} \times 2.000$$

Para realizar estas operaciones observamos en la figura que tomar $\frac{1}{4}$ de 2.000 es dividir 2.000 en 4 partes y tomar una; los $\frac{3}{4}$ es

tomar 3 de las 4 partes:

$$\frac{1}{4} \text{ de } 2.000 = \frac{1}{4} \times 2.000 = \frac{1 \times 2.000}{4} = 500 \text{ m}^2$$

$$\frac{3}{4} \text{ de } 2.000 = \frac{3}{4} \times 2.000 = \frac{3 \times 2.000}{4} = 1.500 \text{ m}^2$$

Del mismo modo:

$$\frac{3}{11} \times 3 = \frac{3 \times 3}{11} = \frac{9}{11}$$

$$\frac{5}{16} \times 6 = \frac{5 \times 6}{16} = \frac{5 \times 3}{8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

Para tomar una fracción de un número se multiplica la fracción por dicho número.

Para multiplicar una fracción por un número se multiplica el numerador por dicho número.

58. Práctica de la multiplicación de fracciones en un caso particular

Un labrador siembra los $\frac{3}{4}$ *de su campo con cereales, y de éstos reserva los* $\frac{2}{3}$ *para el trigo. ¿Qué parte de su campo sembró con trigo?*

Para hallar los $\frac{3}{4}$ del campo, se divide en 4 partes y se toman 3 de ellas. Tomar los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ equivale a tomar 2 de las 3 partes de que se compone o sea:

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Del mismo modo es:

$$\frac{2}{5} \text{ de } \frac{5}{7} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{3}{8} \text{ de } \frac{8}{11} = \frac{3}{8} \times \frac{8}{11} = \frac{3}{11}$$

Se simplifica el numerador de una fracción con el denominador de la otra.

59. Práctica de la multiplicación de fracciones en el caso general

Un labrador reserva los $\frac{3}{5}$ *de sus campos para sembrar cereales, y destina los* $\frac{4}{7}$ *de éstos para el trigo. ¿Qué parte de sus tierras ha sembrado de trigo?*

La parte pedida es:

$$\frac{4}{7} \text{ de } \frac{3}{5} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{7 \times 3} \times \frac{7 \times 3}{7 \times 5} =$$

$$= \frac{4 \times 3}{7 \times 5} = \frac{12}{35}$$

Hemos logrado que el denominador, 7×3, de la primera fracción sea igual al numerador de la segunda fracción, y a continuación hemos aplicado la regla anterior.

Del mismo modo:

$$\frac{5}{11} \text{ de } \frac{3}{8} = \frac{5}{11} \times \frac{3}{8} = \frac{5 \times 3}{11 \times 3} \times \frac{11 \times 3}{11 \times 8} =$$

$$= \frac{5 \times 3}{11 \times 8} = \frac{15}{88}$$

Para multiplicar dos fracciones, se multiplican los numeradores para formar el numerador del producto, y se multiplican los denominadores para formar el denominador del producto.

Si una de las fracciones es un número mixto, se reduce a fracción impropia.

60. Problemas

1. *A Luis le regalaron los* $\frac{2}{3}$ *de los* $\frac{3}{4}$ *de un pastel, y a su hermano el resto. ¿Qué partes del pastel recibió cada uno?*

Solución: Recibió Luis:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Luis recibió la mitad del pastel, y su hermana la otra mitad.

2. *Un comerciante vende* $\frac{2}{5}$ *de tonelada de carbón a* $\frac{3}{7}$ *de peseta el kilogramo. ¿Cuánto cobrará?*

Solución: Vende $\frac{2}{5} \times 1.000 = \frac{2.000}{5} = 400$ Kg.

Cobrará:

$$400 \times \frac{3}{7} = \frac{400 \times 3}{7} = \frac{1.200}{7} = \mathbf{171}\ \frac{3}{7}\ \textbf{ptas.}$$

EJERCICIOS

1. Calcula el valor de:

$\frac{1}{4}$ de 20 pesetas; $\frac{3}{4}$ de 20 pesetas; $\frac{1}{5}$ de 15 pesetas.

$\frac{1}{6}$ de 18 Kg.; $\frac{5}{6}$ de 18 Kg.; $\frac{1}{10}$ de 50 Kg.

$\frac{1}{4}$ de 5 m.; $\frac{3}{4}$ de 5 m.; $\frac{1}{5}$ de 8 duros.

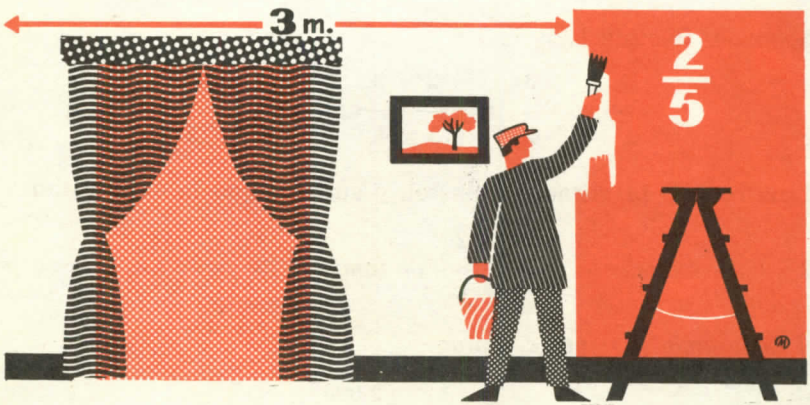
2. Multiplica:

$\frac{3}{7} \times 2$; $\frac{2}{11} \times 3$; $\frac{4}{15} \times 5$; $\frac{17}{24} \times 4$; $\frac{17}{24} \times 6$;

$\frac{5}{12} \times 6$; $\frac{3}{13} \times 4$; $\frac{7}{12} \times 6$; $\frac{11}{36} \times 4$; $\frac{11}{36} \times 12$;

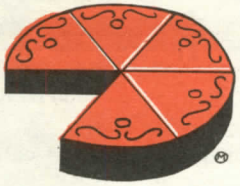
$\frac{2}{15} \times 3$; $\frac{2}{15} \times 10$; $\frac{2}{15} \times 30$; $\frac{6}{5} \times 11$; $\frac{3}{4} \times 7$;

3. Halla la longitud de la pared:

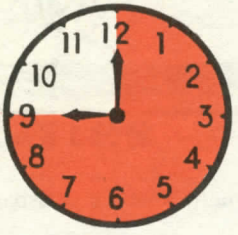


4. Divide una hoja de papel en 8 partes iguales. ¿Cuántos octavos de hoja necesitas para tener $\frac{1}{4}$ de ella?; ¿para tener $\frac{1}{2}$?; ¿para tener $\frac{1}{8}$?; ¿cuántos cuartos son $\frac{6}{8}$ de hoja?

5. Expresa como fracción:



___DE TARTA



___DE HORA

___DE LITRO

Halla los productos siguientes en forma de fracción irreducible:

6. $\frac{4}{5} \times \frac{10}{13}$; 7. $\frac{7}{9} \times \frac{5}{14}$; 8. $\frac{5}{8} \times \frac{11}{15}$

9. $\frac{4}{7} \times \frac{7}{11}$; 10. $\frac{11}{18} \times \frac{9}{22}$; 11. $\frac{16}{21} \times \frac{7}{8}$; 12. $\frac{2}{11} \times \frac{11}{35}$

Halla el valor de:

13. $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ de 24 pesetas;

14. $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de 30 litros

15. 10 m. $\times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$;

16. $\frac{1}{2}$ hora $\times \frac{2}{3} \times 5$

17. $\frac{1}{12}$ de 20 cm; $\frac{5}{12}$ de 20 cm; $\frac{7}{12}$ de 20 cm.

18. $\frac{1}{2}$ de 4 días; $\frac{1}{3}$ de 6 horas; $\frac{3}{4}$ de 10 Km.

19. $\frac{3}{14}$ de 21; $\frac{5}{8}$ de 100; $\frac{2}{5}$ de 40.

20. $\frac{3}{8}$ de $\frac{11}{17}$

21. $\frac{1}{10} \times \frac{2}{7}$

22. $\frac{29}{36}$ de $\frac{1}{26}$

23. $\frac{37}{42} \times \frac{9}{55}$

24. $\frac{3}{8} \times \frac{16}{21} \times \frac{35}{64}$

25. $\frac{1}{9} \times \frac{3}{8}$ de $\frac{2}{5}$

26. Una etapa de la vuelta ciclista a España consta de 231 Km. Al cabo de 5 horas de marcha el que va en cabeza ha recorrido los $\frac{5}{11}$ del trayecto. ¿Cuántos Km le faltan para terminar la etapa?

27. Si poseo los $\frac{7}{15}$ de las acciones de una fábrica que produce 372000 pesetas de renta anual, ¿cuál es la ganancia que me corresponde?

28. Un señor deja $\frac{5}{8}$ de su capital a su hijo y el resto a su hija. El capital del señor es de 226000 pesetas. ¿cuál es la parte del capital que corresponde a la hija?

29. Se han contruido $\frac{11}{16}$ de la longitud de un ferrocarril que ha de medir 896 Km. ¿Cuántos Km faltan para terminar?

30. Un capital consta de 12 partes, de las cuales yo poseo 7. De esta propiedad doy a los pobres 10000 pesetas. Si el capital total es de 120000 pesetas, ¿cuánto me queda?

31. Un vapor lleva en sus bodegas 1620 toneladas de carbón; quema $\frac{13}{18}$ de este total en una travesía. ¿Cuántos días más podría navegar quemando 90 toneladas al día?

32. Una sociedad tiene en un año un beneficio de 401720 pesetas. De esta cantidad el principal lleva $\frac{4}{11}$, el segundo $\frac{3}{11}$ y el tercero $\frac{2}{11}$. El resto se añade al fondo de reserva. ¿Cuánto lleva cada socio y cuánto va al fondo de reserva?

33. Un reloj adelanta $\frac{2}{9}$ de minuto cada hora. Puesto en hora al mediodía, ¿qué hora marcará 6 días después, también al mediodía?

34. ¿Cuánto valen 173 litros de vino a $\frac{27}{5}$ pesetas el litro?

35. Un tendero tiene 15 toneles iguales llenos de vino. Después de haber vendido $\frac{3}{5}$ del total le quedan 3600 litros de vino. Hallar, 1.º, cuántos toneles le quedan; 2.º, la cabida de cada tonel.

36. ¿Cuántos litros de vino pueden embotellarse en 21 docenas de botellas de $\frac{5}{7}$ de litro cada una?

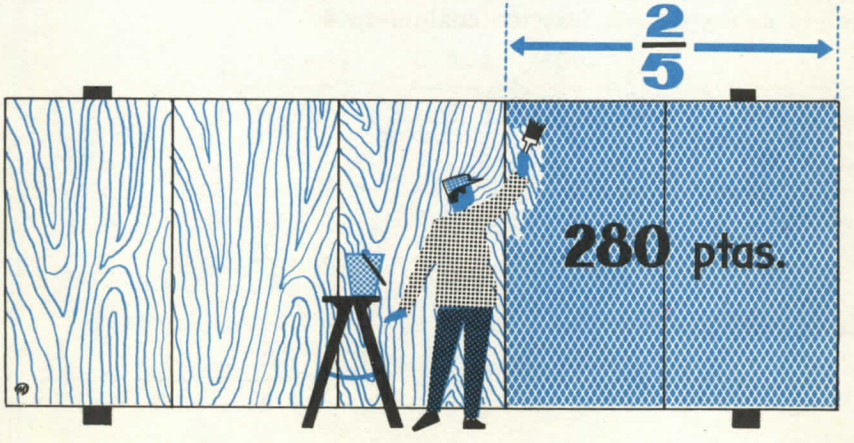
37. A Enrique le regalaron $\frac{3}{4}$ de los $\frac{2}{5}$ de una tableta de chocolate. ¿Qué parte de la tableta recibió?

38. ¿Cuánto cobrará un comerciante por la venta de $\frac{3}{5}$ de un quintal métrico de arroz, a $\frac{26}{3}$ ptas. el kilogramo?

39. ¿Cuánto deberé abonar por la compra de $\frac{3}{4}$ de litro de vino, a $\frac{27}{5}$ pesetas el litro?

40. En una excursión caminamos con una velocidad media de $\frac{16}{3}$ kilómetros por hora. ¿Cuánto hemos andado después de $\frac{11}{4}$ horas?

41. Por los $\frac{2}{5}$ de un trabajo un obrero recibió 280 ptas. ¿Cuánto habría recibido si hubiera realizado el trabajo completo?



11

Propiedades de la multiplicación de números racionales

61. Propiedad uniforme

El producto de dos números racionales es independiente de los representantes elegidos. En efecto, sean

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' = a'b$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Leftrightarrow cd' = c'd$$

Multiplicando las dos igualdades entre números enteros:

$$ac \times b'd' = a'c' \times bd \Leftrightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'}$$

Esto nos permite definir: **dados dos números racionales α y α', su producto es el racional asociado al producto de una fracción cualquiera de α y de una fracción cualquiera de α'.**

$$\left\{\frac{a}{b}\right\} \times \left\{\frac{c}{d}\right\} = \left\{\frac{a \times c}{b \times d}\right\}$$

EJEMPLOS:

1.º Comprueba que

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{6} \times \frac{4}{8}$$

En efecto

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{4}{6} \times \frac{4}{8} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$$

2.º Comprueba que

$$\frac{2}{7} = \frac{10}{35} \; ; \; \frac{3}{8} = \frac{21}{56}$$

y que

$$\frac{2}{7} \times \frac{21}{56} = \frac{10}{35} \times \frac{3}{8}$$

62. Propiedad conmutativa

Se tiene en virtud de la propiedad conmutativa de los enteros

$$\left\{\frac{a}{b}\right\} \times \left\{\frac{c}{d}\right\} = \left\{\frac{a \times c}{b \times d}\right\} = \left\{\frac{c \times a}{d \times b}\right\} = \left\{\frac{c}{d}\right\} \times \left\{\frac{a}{b}\right\}$$

lo que demuestra que

El orden de los factores no altera el producto de números racionales.

EJEMPLOS:

1.º ¿Es cierto que $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$? Compruébalo.

En efecto

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \; ; \; \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

2.º En las igualdades siguientes sustituye las letras por números, de modo que aquéllas se verifiquen:

$$\left(\frac{-4}{3}\right) \times \frac{2}{5} = \alpha \times \left(\frac{-4}{3}\right)$$

$$\left(\frac{-7}{2}\right) \times \beta = \beta \times \left(\frac{-7}{2}\right)$$

63. Propiedad asociativa

En virtud de la propiedad asociativa de la multiplicación de enteros, se tiene

$$\left[\left\{\frac{a}{b}\right\} \times \left\{\frac{c}{d}\right\}\right] \times \left\{\frac{e}{f}\right\} = \left\{\frac{(a \times c) \times e}{(b \times d) \times f}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{a \times (c \times e)}{b \times (d \times f)}\right\} = \left\{\frac{a}{b}\right\} \times \left[\left\{\frac{c}{d}\right\} \times \left\{\frac{e}{f}\right\}\right]$$

o sea

$$(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma)$$

EJEMPLOS:

1.º Sustituye las letras por números para que se verifiquen las igualdades siguientes:

$$\left[\left(\frac{-2}{5}\right) \times \frac{4}{7}\right] \times \alpha = \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left[\frac{4}{7} \times \left(\frac{-5}{8}\right)\right]$$

$$\left[\left(\frac{-3}{5}\right) \times \beta\right] \times \frac{2}{9} = \left(\frac{-3}{5}\right) \times \left[\beta \times \frac{2}{9}\right]$$

2.º Aplicando sucesivamente las propiedades asociativa y conmutativa al producto de tres números racionales, α, β y γ, demuestra que en cualquier orden y forma en que se efectúe, se obtiene siempre el mismo resultado. Luego dicho producto puede escribirse sin necesidad de paréntesis, simplemente así

$$\alpha \times \beta \times \gamma$$

Lo mismo sucede con un producto cualquiera de factores.

64. Elemento neutro de la multiplicación

Ya que

$$\left\{\frac{a}{b}\right\} \times \left\{\frac{n}{n}\right\} = \left\{\frac{a \times n}{b \times n}\right\} = \left\{\frac{a}{b}\right\}$$

se deduce que la clase $\left\{\frac{n}{n}\right\}$ es el **elemento neutro** de la multiplicación, y se denomina elemento **unidad**, o 1.

El producto de un número racional cualquiera por el elemento unidad $\left\{\frac{n}{n}\right\}$ es el mismo número racional dado.

Se escribe así

$$\alpha \times 1 = \alpha$$

65. Elemento inverso

Dado un número racional cualquiera $\left\{\frac{a}{b}\right\}$, distinto de cero, se verifica que

$$\left\{\frac{a}{b}\right\} \times \left\{\frac{b}{a}\right\} = \left\{\frac{a \times b}{b \times a}\right\} = \left\{\frac{1}{1}\right\} = 1$$

Luego todo número racional, $\left\{\frac{a}{b}\right\}$, exceptuando el 0, tiene un elemento simétrico, $\left\{\frac{b}{a}\right\}$, denominado **inverso,** que se obtiene invirtiendo los dos elementos de la pareja de números enteros.

Dado un número racional $\alpha = \left\{\frac{a}{b}\right\}$, su inverso $\left\{\frac{b}{a}\right\}$ se representa por α^{-1}, verificándose

$$\alpha \times \alpha^{-1} = 1$$

EJEMPLOS:

1.º Halla el inverso del número $\frac{-2}{5}$.

Solución: Es el número $-\frac{5}{2}$

$$\left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{2 \times 5}{5 \times 2} = \frac{1}{1} = 1$$

2.º Halla el valor de las letras para que se cumplan las siguientes igualdades:

$$\frac{3}{4} \times \alpha = 1 \quad ; \quad \beta \times \left(\frac{-5}{8}\right) = 1$$

66. El grupo multiplicativo de los números racionales

De las cinco propiedades anteriores deducimos que: **El conjunto $Q^* = Q - [0]$ es un grupo conmutativo respecto a la operación de multiplicación,** o sencillamente, **es un grupo multiplicativo.**

67. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición

En virtud de las propiedades de la multiplicación de números enteros, se tiene

$$\left[\left\{\frac{a}{n}\right\} + \left\{\frac{b}{n}\right\}\right] \times \left\{\frac{c}{d}\right\} = \left\{\frac{a+b}{n}\right\} \times \left\{\frac{c}{d}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{(a+b)\,c}{n \times d}\right\} = \left\{\frac{ac+bc}{n \times d}\right\} = \left\{\frac{ac}{nd}\right\} + \left\{\frac{bc}{nd}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{a}{n}\right\}\left\{\frac{c}{d}\right\} + \left\{\frac{b}{n}\right\}\left\{\frac{c}{d}\right\}$$

La multiplicación de racionales es distributiva respecto a la adición.

68. Concepto de cuerpo

Todo conjunto **C** se dice que tiene la estructura de **cuerpo** cuando se pueden definir en él dos operaciones o leyes de composición interna distintas, y tales que: 1.º) respecto a la primera operación, el conjunto **C** sea un "grupo abeliano"; 2.º) respecto a la segunda operación, el conjunto $\mathbf{C^*} = \mathbf{C} - \{0\}$ constituya un "grupo"; 3.º) la segunda operación sea distributiva respecto a la primera. En resumen: **"cuerpo" es un anillo cuyos elementos distintos del neutro de la adición constituyen un grupo multiplicativo.**

Todo cuerpo es un anillo, pero no a la inversa.

69. El cuerpo Q de los números racionales

Por cumplir las propiedades demostradas en los números anteriores, **el conjunto Q de los números racionales es un cuerpo conmutativo,** ya que la segunda operación tiene además la propiedad conmutativa.

70. Isomorfismo del anillo Z con una parte del cuerpo Q

Nada de lo dicho hasta aquí nos autoriza a suponer que el número racional $\frac{a}{1}$ sea el número entero **a.**

Lo que sí podemos es establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto **Z** y el conjunto **Q'** de los números racionales de la forma $\left\{\frac{a}{1}\right\}$. Hagamos que a todo número entero **a** le corresponda el racional $\left\{\frac{a}{1}\right\}$. Se verifica entonces

$$f(a) = \left\{\frac{a}{1}\right\}$$

$$f(b) = \left\{\frac{b}{1}\right\}$$

$$f(a+b) = \left\{\frac{a+b}{1}\right\} = \left\{\frac{a}{1}\right\} + \left\{\frac{b}{1}\right\} = f(a) + f(b)$$

$$f(a \times b) = \left\{\frac{a \times b}{1}\right\} = \left\{\frac{a}{1}\right\} \times \left\{\frac{b}{1}\right\} = f(a) \times f(b)$$

La correspondencia así definida es biunívoca y **conserva la suma y el producto.** Luego es un **isomorfismo.**

Aunque los números enteros y los racionales son de distinta naturaleza, el isomorfismo considerado nos autoriza a considerar ambos conjuntos como idénticos frente a las operaciones de adición y multiplicación, y a tomar unos por otros.

Se dice que se ha **sumergido** el conjunto **Z** en el conjunto **Q** mediante la identificación $a = \left\{\frac{a}{1}\right\}$. Así, pues

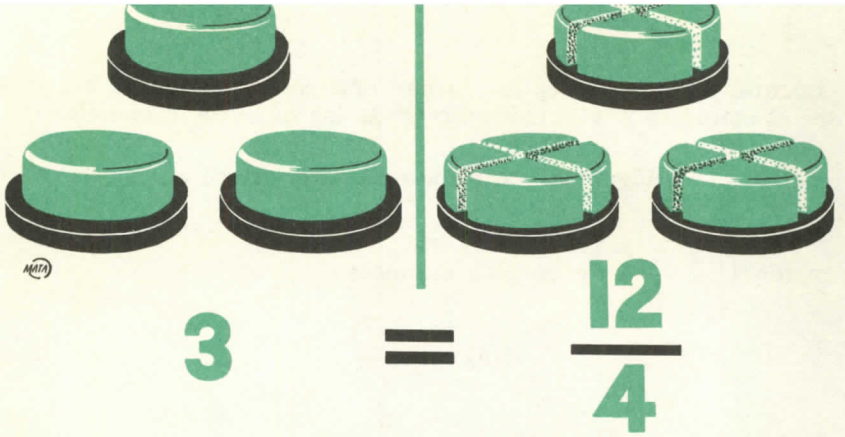
El anillo Z es una parte del cuerpo Q de los racionales.

71. Expresar un número entero en forma de fracción

Un número entero puede expresarse en forma fraccionaria de denominador cualquiera. Así en la figura las tartas son las mismas, ya estén enteras, ya estén divididas en trozos. Luego:

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{3 \times 4}{4} = \frac{12}{4} \quad ; \quad 3 = \frac{3}{1} = \frac{3 \times 7}{7} = \frac{21}{7}$$

$$1 = \frac{5}{5} = \frac{7}{7} = \frac{13}{13} = \frac{35}{35}$$



Se multiplica y se divide el número entero por el denominador propuesto.

72. Clasificación de las fracciones

Según el valor relativo de sus términos, las fracciones se clasifican en:

1.º **Fracciones propias.**—Son aquellas cuyo numerador es menor que el denominador, como:

$$\frac{3}{5} \; ; \; \frac{11}{17}$$

2.º **Fracciones impropias.**—Son aquellas cuyo numerador es igual o mayor que el denominador, como:

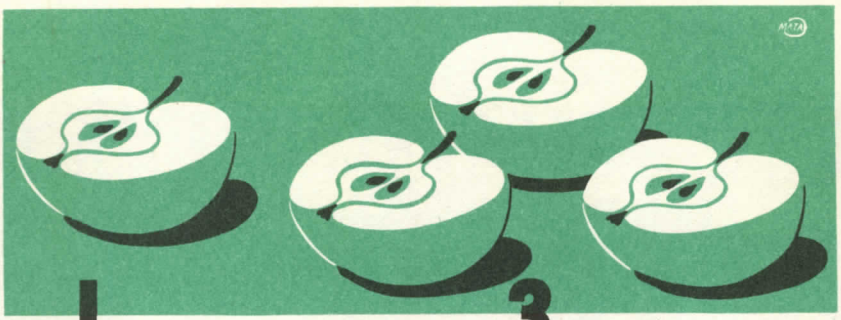
$$\frac{4}{4} \; ; \; \frac{5}{3} \; ; \; \frac{17}{12}$$

Las fracciones propias son **menores** que la unidad, y las fracciones impropias son **mayores** que la unidad. En la figura $\frac{1}{2}$ de manzana es fracción **propia:** $\frac{3}{2}$ de manzana es **impropia.**

73. Número mixto

Es el formado por la suma de un entero y una fracción, como:

$$4\frac{5}{6} \; ; \; 3\frac{2}{7}$$



$\frac{1}{2} < 1$ $\qquad$ $\frac{3}{2} > 1$

Se debe observar que

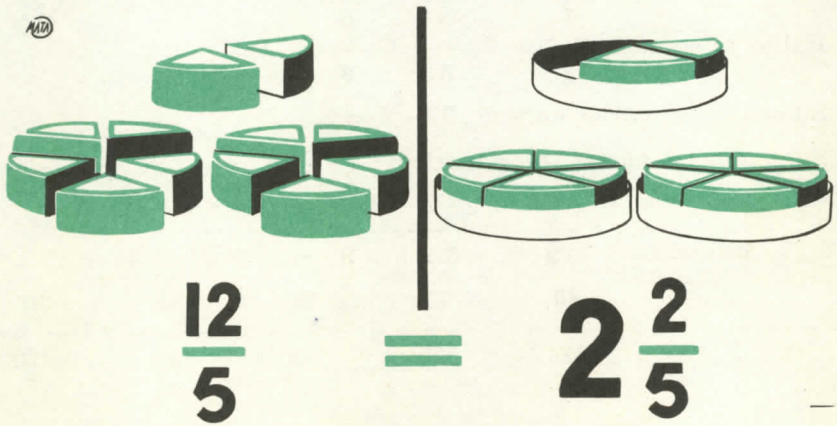
$$4\frac{5}{6} \text{ significa } 4 + \frac{5}{6}, \text{ y no } 4 \times \frac{5}{6}$$

74. Transformar una fracción impropia en número mixto

Ora estén sueltos, ora estén en sus cajas los trozos de queso de la figura adjunta son los mismos. Luego:

$$\frac{12}{5} = (10 + 2) \text{ quintos} = \frac{10}{5} + \frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5}$$

Para transformar una fracción impropia en número mixto, se divide el numerador por el denominador; el cociente entero será la parte entera del número mixto, y la parte fraccionaria tendrá por numerador el resto, y por denominador el mismo de la fracción.



$\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$

Ejemplo 1:

$$\frac{11}{6} = 1\frac{5}{6} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 6 \\ \hline 5 & 1 \end{array}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{27}{8} = 3\frac{3}{8} \qquad \begin{array}{r|l} 27 & 8 \\ \hline 3 & 3 \end{array}$$

Ejemplo 3:

$$\frac{316}{17} = 18\frac{10}{17} \qquad \begin{array}{r|l} 316 & 17 \\ \hline 146 & 18 \\ 10 & \end{array}$$

75. Convertir un número mixto en fracción impropia

Este problema es inverso al interior. Sea expresar $7\frac{5}{9}$ en forma de fracción impropia.

$$7\frac{5}{9} = \frac{7 \times 9}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7 \times 9 + 5}{9} = \frac{63 + 5}{9} = \frac{68}{9}$$

Para convertir un número mixto en fracción impropia, se multiplica el entero por el denominador; a este producto se añade el numerador, y al resultado obtenido se le pone por denominador el mismo que tenía la fracción.

76. Operaciones con números mixtos

Hallar la suma $3\frac{1}{3} + 2\frac{3}{5} + \frac{5}{8}$.

Sumemos las partes enteras: $3 + 2 = 5$.

Sumemos las partes fraccionarias:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{8} = \frac{1 \times 5 \times 8}{3 \times 5 \times 8} + \frac{3 \times 3 \times 8}{3 \times 5 \times 8} + \frac{5 \times 3 \times 5}{3 \times 5 \times 8} = \frac{40}{120} + \frac{72}{120} + \frac{75}{120} = \frac{187}{120} = 1\frac{67}{120}$$

La suma pedida vale: $5 + 1\frac{67}{120} = 6\frac{67}{120}$.

Para sumar números mixtos se suman aparte las partes enteras y las partes fraccionarias.

Restar números mixtos.—Para hallar la diferencia $5\frac{2}{3} - 2\frac{1}{5}$, se procede reduciendo los números mixtos a fracciones impropias; así,

$$5\frac{2}{3} - 2\frac{1}{5} = \frac{17}{3} - \frac{11}{5} = \frac{17 \times 5}{3 \times 5} - \frac{11 \times 3}{3 \times 5} =$$

$$= \frac{85}{15} - \frac{33}{15} = \frac{52}{15} = 3\frac{7}{15}$$

Para restar números mixtos, se reducen a fracciones impropias, y en seguida se aplica el caso anterior.

Del mismo modo se procede para **multiplicar** números mixtos: **se reducen previamente a fracciones impropias.**

EJERCICIOS

1. Calcula las diferencias:

$$\left(-\frac{8}{25}\right) - \left(+\frac{3}{4}\right) \; ; \; \left(-\frac{7}{5}\right) - \left(-\frac{8}{15}\right)$$

$$\frac{15}{8} - \left(-\frac{8}{3}\right) \; ; \; \frac{3}{5} - \left(-\frac{7}{15}\right)$$

2. Efectúa las operaciones siguientes:

$$\left[\frac{3}{5} - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{8}\right)\right] + \left[3 - \left(\frac{4}{9} + \frac{3}{10}\right)\right] -$$

$$- \left(\frac{7}{5} - \frac{15}{8}\right)$$

Efectúa:

3. $\frac{3}{4} \times \frac{16}{27}$

4. $\frac{14}{15} \times \frac{9}{28}$

5. $\frac{6}{11} \times \frac{22}{9}$

6. $\frac{8}{25} \times \frac{15}{16}$

7. $\frac{5}{12} \times 8$

8. $15 \times \frac{2}{3}$

9. $6 \times \frac{5}{12}$

10. $10 \times \frac{3}{4}$

11. $\frac{5}{6} \times \frac{3}{2}$

12. $\frac{7}{15} \times \frac{5}{21}$

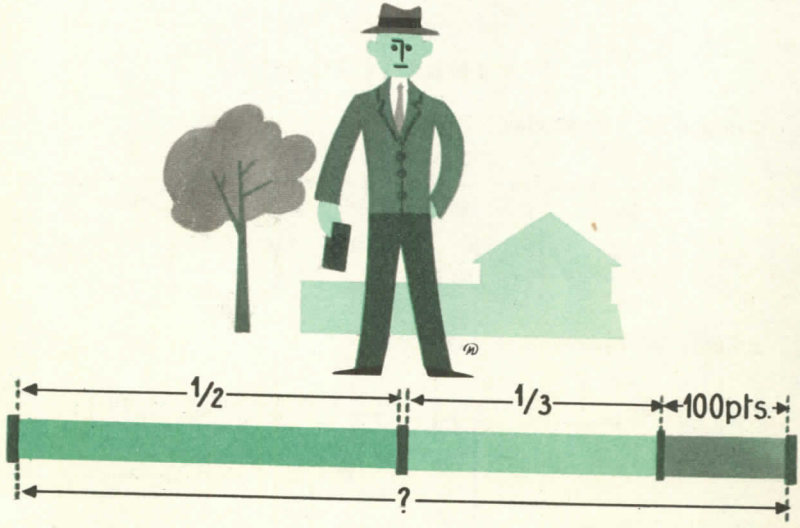
13. $\frac{8}{9} \times \frac{27}{40}$

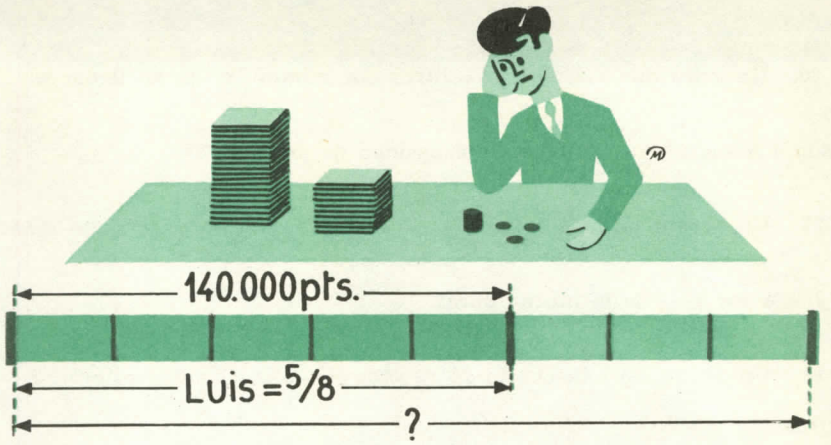
14. $6\frac{1}{2} \times \frac{5}{3}$

15. Un hombre maduro hace 17 inspiraciones por minuto. Cada inspiración lleva $\frac{8}{15}$ de litro de aire a sus pulmores. Qué volumen de aire ha entrado en sus pulmones en un día?

16. Un peón gana 164 pesetas al día. Trabajó 17 días, pero haciendo cada vez sólo los $\frac{7}{8}$ del día. ¿Cuánto se le debe?

17. Una persona gasta $\frac{1}{2}$ de su dinero; luego, $\frac{1}{3}$ del mismo; le quedan, por fin, 100 pesetas. ¿Cuánto tenía?





18. Luis ha heredado 140.000 pesetas, y éstas representan los $\frac{5}{8}$ de la fortuna de sus padres. ¿A cuánto ascendió ésta?

19. Un acorazado puede navegar 35 $\frac{2}{3}$ kilómetros por hora. ¿Qué distancia recorre en 5 horas y $\frac{1}{4}$?

20. Un hombre respira aproximadamente 18 veces por minuto, introduciendo cada vez en los pulmones 5/7 de litro de aire. ¿Cuánto aire introduce en 3 horas y 1/4?

21. ¿Qué número hay que dividir por $9\frac{3}{4}$ para obtener: a) 6; b) $\frac{3}{2}$; c) $6\frac{1}{2}$?

22. ¿Cuál es el número que vale los $\frac{3}{4}$ de $\frac{7}{6}$?

23. Un número vale los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{6}{5}$ de 11 $\frac{2}{3}$. ¿Cuál es este número?

24. Un comerciante vende 18 $\frac{1}{3}$ docenas de huevos a 20 $\frac{2}{5}$ pesetas la docena. ¿Cuánto importó esa venta?

25. Un niño compra un balón de 250 pesetas y paga al contado los $\frac{3}{5}$ del mismo. ¿Cuánto pagó?

26. Un grifo que vierte $7\frac{3}{5}$ litros por minuto, tarda en llenar un depósito 4 horas y $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la capacidad del mismo?

27. Un obrero tarda 3 horas y $\frac{3}{4}$ en hacer una obra. ¿Cuánto tardará en hacer los $\frac{4}{5}$ de la misma obra?

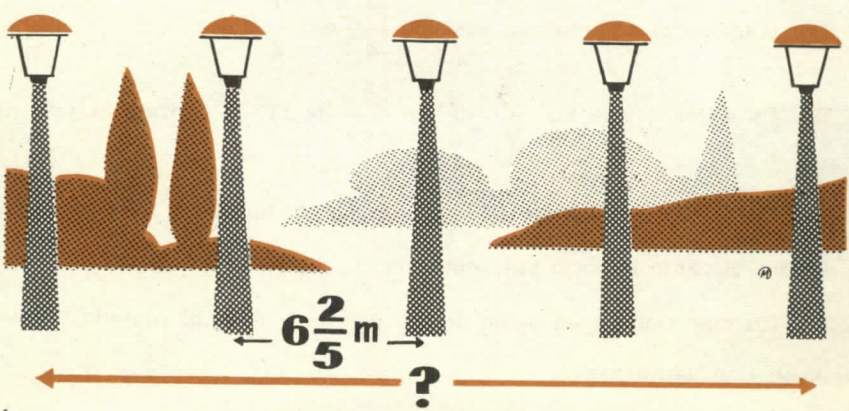
28. Un metro de tela cuesta 26 pesetas y $\frac{2}{5}$. ¿Cuánto costarán $3\frac{1}{6}$ metros?

29. Un albañil hace en un día 5 metros y $\frac{8}{9}$ de tapia. ¿Cuántos hará en 2 días y $\frac{2}{3}$?

30. El paso de un hombre mide $\frac{3}{5}$ de metro. Para recorrer un pasillo tiene que dar 37 pasos y $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la longitud del pasillo?

31. Una lámpara gasta $7\frac{1}{3}$ kilovatios por hora. ¿Cuál será el gasto después de dos días de estar encendida, a 2 pesetas y $\frac{1}{5}$ el kilovatio?

32. Con los datos del gráfico adjunto plantea un problema y resuélvelo.



12

División de números racionales

77. Definición

Dividir dos números racionales α y β, llamados **dividendo** y **divisor,** respectivamente, el segundo distinto de cero, es hallar otro número racional γ, llamado **cociente,** que multiplicado por el divisor β nos dé el dividendo α, o sea

$$\frac{\alpha}{\beta} = \gamma \Leftrightarrow \beta\,\gamma = \alpha \quad \begin{cases} \alpha \in Q \\ \beta \in Q^* \end{cases}$$

Multipliquemos los dos miembros de la última igualdad por el inverso de β, o sea, por β^{-1}. Resulta

$$\beta \times \beta^{-1} \times \gamma = \alpha \times \beta^{-1}$$

Pero

$$\beta \times \beta^{-1} = 1 \quad \text{y} \quad 1 \times \gamma = \gamma$$

Luego

$$\gamma = \alpha \times \beta^{-1}$$

que nos dice:

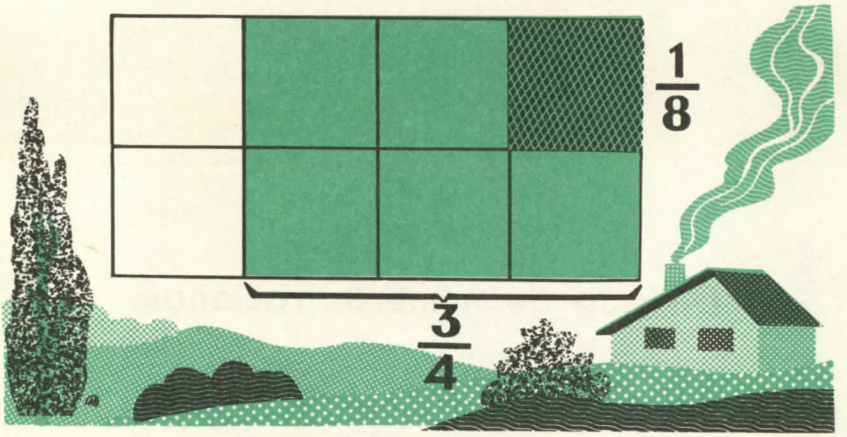
1.º **La división de números racionales es siempre posible.**

2.º **Para dividir dos números racionales se multiplica el dividendo por el inverso del divisor.**

Por tanto, la división no existe como operación independiente en el conjunto **Q** de los números racionales: equivale a una multiplicación. Y he aquí la paradoja: al tratar de dar solución al problema de la división mediante la introducción de los números racionales, lo que conseguimos es hacer desaparecer la división como operación independiente.

78. Problema 1.º

Un labrador ha dividido su campo en 8 parcelas iguales. ¿Cuántas



parcelas contienen los $\frac{3}{4}$ *del campo?*

Cada parcela es $\frac{1}{8}$ del campo. Luego basta ver cuántas veces $\frac{1}{8}$ está contenido en $\frac{3}{4}$, o sea:

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$$

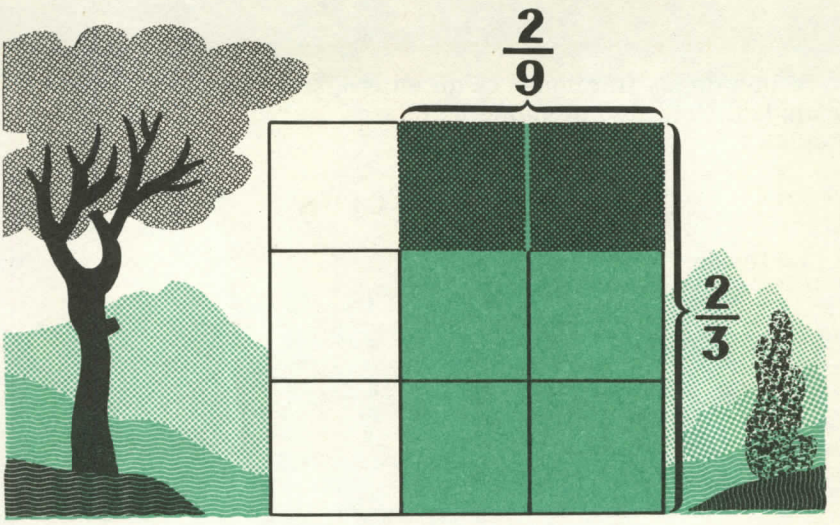
Por otra parte, los $\frac{3}{4}$ del campo contienen:

$\frac{3}{4} \times 8$ parcelas $= \frac{3 \times 8}{4} = 6$ parcelas. Por tanto:

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{1} = \frac{3 \times 8}{4 \times 1} = \frac{24}{4} = 6 \text{ parcelas}$$

79. Problema 2.º

¿Cuántas veces cabe $\frac{2}{9}$ *en* $\frac{2}{3}$*?*



Cabe $\frac{2}{3} : \frac{2}{9}$ veces.

La unidad (todo el campo) contiene 9 parcelas y $\frac{9}{2}$ dobles parcelas.

Luego los $\frac{2}{3}$ contienen:

$\frac{2}{3}$ de $\frac{9}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{2}$ dobles parcelas. O sea:

$$\frac{2}{3} : \frac{2}{9} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{3} = \frac{2 \times 9}{3 \times 2} = \frac{18}{6} = 3$$

Del mismo modo:

$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5} : \frac{2}{1} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{4 \times 1}{5 \times 2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$2\frac{4}{7} : \frac{11}{13} = \frac{17}{7} \times \frac{13}{11} = \frac{17 \times 13}{7 \times 11} = \frac{225}{77}$$

Para dividir dos fracciones se multiplica la fracción dividendo por la fracción divisor invertida.

Si una de las fracciones es un entero, se le pone por denominador la unidad. Para dividir números mixtos, se reducen a fracciones impropias.

EJERCICIOS

1. Divide

$$\frac{2}{3} : 5 \; ; \quad \frac{3}{5} : 8 \; ; \quad \frac{7}{5} : 7 \; ; \quad \frac{3}{8} : 3$$

$$\frac{2}{11} : 4 \; ; \quad \frac{3}{13} : 3 \; ; \quad \frac{8}{17} : 4 \; ; \quad \frac{6}{19} : 7$$

Modelo:

$$\frac{3}{11} : 5 = \frac{3}{11} : \frac{5}{1} = \frac{3 \times 1}{11 \times 5} = \frac{3}{11 \times 5} = \frac{3}{55}$$

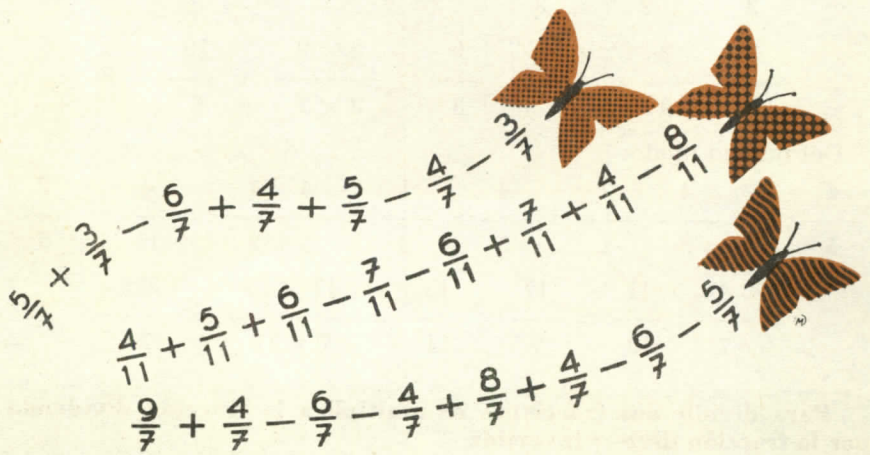
Regla: Se multiplica el denominador por el entero.

2. Efectúa las divisiones:

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{2} \; ; \quad \frac{4}{3} : \frac{1}{4} \; ; \quad \frac{5}{2} : \frac{2}{3} \; ; \quad \frac{3}{4} : \frac{3}{7}$$

$$\frac{3}{8} : \frac{2}{5} \; ; \quad \frac{3}{7} : \frac{1}{5} \; ; \quad \frac{1}{5} : \frac{4}{7} \; ; \quad \frac{2}{3} : \frac{3}{7}$$

3. Sigue el vuelo de la mariposa:



Hallar los cocientes de las divisiones siguientes

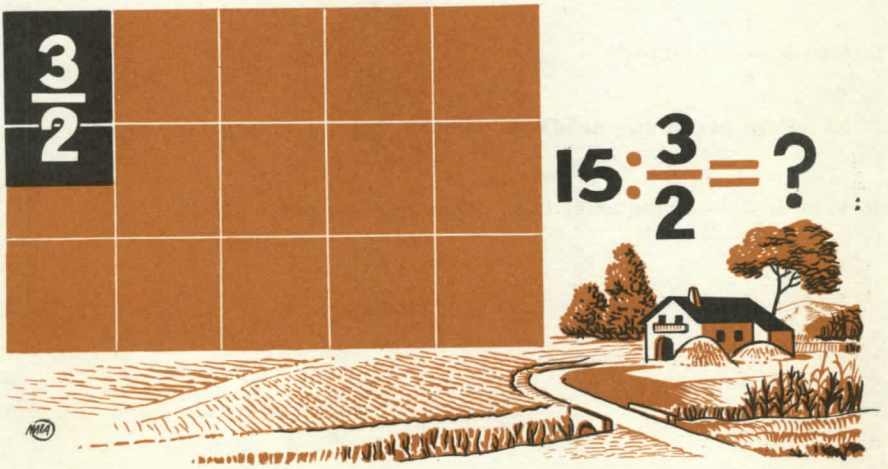
4. $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ 5. $1 : \frac{2}{5}$ 6. $\frac{2}{3} : \frac{2}{5}$

7. $3 : \frac{1}{3}$ 8. $3 : \frac{2}{3}$ 9. $5 : \frac{5}{6}$

10. $\frac{3}{2} : \frac{1}{2}$ 11. $\frac{5}{6} : \frac{11}{2}$ 12. $\frac{1}{2} : \frac{9}{4}$

13. ¿Por qué fracción debe multiplicarse a $\frac{7}{8}$ para obtener el producto $\frac{1}{2}$?

14. ¿Por qué fracción debe dividirse a $\frac{7}{12}$ para obtener como cociente $\frac{1}{3}$?



15. ¿Cuántas parcelas de área $\frac{3}{2}$ contiene este campo?

16. Queremos medir una calle de 257 $\frac{1}{4}$ metros con un bastón de $\frac{7}{8}$ de metro. ¿Cuántas veces cabe?

17. Un hombre recorrió 1.583 $\frac{2}{5}$ metros en un coche cuyas ruedas miden 2 $\frac{1}{4}$ metros de circunferencia. ¿Cuántas vueltas dieron dichas ruedas?

18. Un señor deja al morir 378.000 pesetas, y ordena que los $\frac{5}{6}$ de esta herencia se reparta en partes iguales entre sus 3 hijos. ¿Cuánto le toca a cada uno?

19. Un obrero tarda 2 horas y $\frac{1}{4}$ para hacer $\frac{1}{7}$ de una obra. ¿Qué parte de la obra hará en una hora?

20. ¿Cuanto vale un metro de paño si 5 $\frac{2}{3}$ m valen 275 $\frac{2}{5}$ pesetas?

21. Una fuente da 54 $\frac{3}{7}$ litros en 6 $\frac{1}{2}$ minutos. ¿Cuántos litros arrojará en 2 $\frac{1}{6}$ minutos?

22. Para pagar una deuda de 561 $\frac{3}{4}$ pesetas entregamos 80 $\frac{2}{5}$ litros de vino de 2 $\frac{1}{2}$ pesetas el litro. ¿Cuánto resta por pagar?

13

Trasposición de factores y divisores

80. Equivalencias fundamentales de la división

Según la definición dada de división, sabemos que se cumplen las siguientes equivalencias fundamentales:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta \times \gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \beta$$

Es decir, el número β, que estaba en el primer miembro dividiendo, pasa al segundo miembro multiplicando; y el número γ, que estaba en el segundo miembro multiplicando, pasa al primero dividiendo.

Esta operación se llama **transposición de factores y divisores.**

En una igualdad o desigualdad, todo factor distinto de cero puede pasar al otro miembro como divisor, y todo divisor como factor.

EJEMPLOS:

1.º ¿Qué valor hay que dar a **x** para que sea cierta la igualdad

$$-18 : x = 7?$$

Aplicando las equivalencias fundamentales se halla

$$-18 : x = 7 \Leftrightarrow -18 = x \times 7 \Leftrightarrow \frac{-18}{7} = x$$

En la última vemos que **x** es el número racional — 18/7.

2.º Calcula los valores de las letras en las igualdades siguientes:

$$(-4) \times x = -15 \quad ; \quad y \times 5 = 2 \quad ; \quad 5 : z = 12$$

81. Ecuaciones

1. **Calcula el valor que debe tener x para que se verifique la igualdad**

$$\frac{-7+x}{5}=\frac{16}{9}$$

Solución:

$$\frac{-7+x}{5}=\frac{16}{9}\Leftrightarrow -7+x=\frac{16}{9}\times 5=\frac{80}{9}$$

$$-7+x=\frac{80}{9}\Leftrightarrow x=\frac{80}{9}+7=\frac{80}{9}+\frac{63}{9}=\frac{143}{9}$$

2. **Calcula el valor que debe tener x para que se verifique la igualdad.**

$$\frac{x+8}{7}=x-16$$

Solución:

$$\frac{x+8}{7}=x-16\Leftrightarrow x+8=7\times(x-16)=7x-112$$

$$x+8=7x-112\Leftrightarrow 8+112=7x-x=(7-1)\,x=6x$$

$$120=6x\Leftrightarrow x=\frac{120}{6}=20$$

3. Si escribes:

$$6\,(x+3)=6x+18 \qquad (2)$$

ves que lo escrito en el segundo miembro es el resultado de las operaciones efectuadas en el primero. Sustituyendo **x** por un valor numérico **cualquiera** se obtiene una **igualdad numérica.** La relación (2) es una **identidad.**

4. Si escribes:

$$5\,(x+3)=2x+6$$

equivale a preguntar: **¿Existe algún valor de x tal que 5 (x + 3) sea igual a 2 x + 8?**

Lógicamente debería escribirse:

$$¿5\,(x+3)=2x+6?$$

para indicar que se trata de una cuestión propuesta. Pero ha prevalecido la costumbre de suprimir los signos de interrogación.

Tal igualdad condicional se llama una **ecuación;** el número **x** es la **incógnita de la ecuación.**

Una ecuación es una igualdad condicional en la cual los dos miembros sólo toman valores numéricos iguales para ciertos valores atribuidos a las letras que contienen.

EJERCICIOS

Resuelve las ecuaciones siguientes

1. $\frac{x}{6} = 3.$
2. $\frac{x}{8} = 9.$
3. $\frac{n}{2} + \frac{n}{5} = 28.$
4. $\frac{a}{2} + \frac{a}{3} = 35.$
5. $\frac{x}{7} + \frac{x}{2} = 63.$
6. $\frac{2x}{3} + 2 = 10.$
7. $\frac{3x}{4} + 8 = 14.$
8. $\frac{5x}{2} - 11 = 9.$

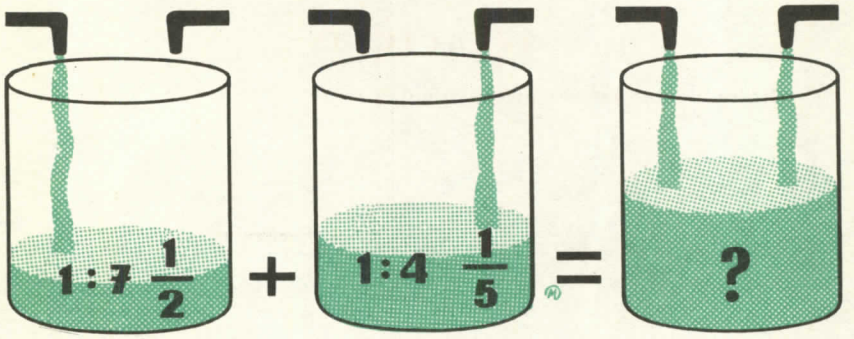
Hallar el valor de:

9. $\frac{48}{49} : 16;$
10. $\frac{48}{49} : 8;$
11. $\frac{48}{49} : 3$
12. $3\frac{1}{5} : 6;$
13. $9\frac{7}{9} : 16;$
14. $20\frac{3}{10} : 29$
15. $21 : 1\frac{5}{9}$
16. $3\frac{3}{8} : 2\frac{13}{16}$
17. $4\frac{3}{4} : 7\frac{1}{8}$
18. $1\frac{19}{58} : 1\frac{15}{29}$
19. $\frac{25}{27} : \frac{40}{81}$
20. $14\frac{17}{20} : 3\frac{3}{5}$
21. $85 : 6\frac{4}{5}$
22. $4\frac{3}{8} : 1\frac{29}{36}$
23. $3\frac{1}{2} : 2\frac{1}{3}$

24. Un señor sufre en su sueldo mensual un descuento de sus $\frac{2}{9}$, y percibe 11.270 pesetas. ¿Cuál es su sueldo anual sin descontar?

25. Por tres billetes ordinarios y cinco medios billetes (de niño) se han pagado 165 pesetas. ¿Cuánto cuesta cada billete?

26. La longitud de la circunferencia es aproximadamente los $\frac{22}{7}$ de su diámetro. Hallar el diámetro de una circunferencia que tiene 1.584 metros de longitud.



27. Una fuente llena un estanque en $7\frac{1}{2}$ horas, y otra en $4\frac{1}{5}$ horas. ¿Qué parte del depósito llena cada una en una hora? Manando las dos juntas, ¿qué parte del estanque llenarán en una hora? Cuánto tardarán las dos juntas en llenar el estanque?

28. Un operario hace $5\frac{2}{3}$ metros de una obra cada día. ¿Cuánto tardará en hacer 34 metros?

29. ¿Cuántas veces está contenido medio día en $7\frac{1}{2}$ días?

30. ¿Cuántas veces $7\frac{1}{2}$ metros contienen a 6 decímetros?

31. ¿Cuántas veces 33 toneladas contienen $1\frac{5}{6}$ toneladas?

32. La circunferencia de una rueda mide $2\frac{2}{5}$ metros. ¿Cuántas vueltas dará para recorrer 30 metros?

33. ¿Cuántos camiones se necesitan para transportar 27 toneladas si cada uno puede llevar $3\frac{3}{8}$ toneladas?

34. Un terreno bien cultivado produce $30\frac{1}{4}$ hectolitros de trigo por

hectárea. Sabiendo que el terreno ha producido en total $253\frac{1}{2}$ hectolitros de trigo, calcular su superficie.

35. Un sastre tiene una pieza de paño de $25\frac{1}{3}$ metros para hacer chaquetas. Si en cada una emplea $1\frac{2}{5}$ metros, ¿cuántas chaquetas podrá hacer?

36. Si $2\frac{5}{8}$ pasteles se dividen entre 7 niños, ¿qué porción toca a cada uno?

37. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia de una rueda si con $9\frac{1}{11}$ metros se le dan 10 vueltas?

38. Si 19 carros llevan $7\frac{3}{5}$ toneladas de carbón, ¿qué peso lleva cada uno?

39. Hallar la longitud de 100 rieles de $5\frac{7}{10}$ metros cada uno.

40. Si 31 metros de alambre cuestan $103\frac{1}{3}$ pesetas, ¿cuánto cuesta un metro?

41. Mientras que un ciclista hace los $\frac{3}{7}$ de una distancia, un coche hace los $\frac{5}{8}$ de la misma. ¿Quién va más de prisa? ¿Cuántas veces más de prisa?

42. En el cesto del gráfico adjunto hay $3\frac{1}{3}$ docenas de naranjas. Con este dato, plantea un problema y resuélvelo.

¡Cuidado con que nadie se lleve más de lo debido!

14

Potencias y raíces de números racionales

82. Potencia de una fracción

Por definición de potencia y por la regla de multiplicar fracciones, se tiene:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4} = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$$

Para elevar una fracción a una potencia, es suficiente elevar cada uno de sus términos a dicha potencia.

Para elevar a una potencia un número mixto, éste podría considerarse como una suma indicada, pero en la práctica es preferible reducirlo antes a quebrado.

Ejemplo:

$$\left(4\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{196}{9} = 21\frac{7}{9}$$

83. Raíz cuadrada de un número decimal

El principio del valor relativo de las sucesivas cifras nos permite extraer la raíz cuadrada de un número decimal. Por las reglas de multiplicar decimales (Primer Curso) es evidente que el cuadrado de cualquier número decimal debe tener siempre un número par de cifras decimales, y que el número de cifras decimales en el cuadrado es el doble del número de tales cifras en la raíz cuadrada.

Por ejemplo:

$(0{,}2)^2 = 0{,}04$; $(0{,}8)^2 = 0{,}64$; $(0{,}13)^2 = 0{,}0169$

$(0{,}05)^2 = 0{,}0025$; $(2{,}8)^2 = 7{,}84$; $(6{,}3)^2 = 39{,}69$

Por tanto, al hallar la raíz cuadrada de un decimal se empieza dividiéndole en grupos de dos cifras a derecha e izquierda, partiendo de la coma. Cada grupo nos dará una cifra para la raíz cuadrada.

EJEMPLOS:

1.º **Halla la raíz cuadrada de:**

a) 18,4041

18,4041	4,29
16	
240	82×2
164	
7641	849×9
7641	
0	

La raíz cuadrada = **4,29**

b) 0,00367236

0,00367236	0,0606
36	120
7236	1206×6
7236	
0	

La raíz cuadrada = **0,0606**

En a) la raíz cuadrada, evidentemente, es mayor que 4 y menor que 5. Luego después de extraer la raíz del número dado como si fuera entero, lo que da tres cifras para la raíz, se separan de la derecha de ésta con una coma dos cifras, es decir, tantas como grupos de dos cifras decimales tenía el número dado.

En b), como el primer grupo de decimales consta de dos ceros, se empieza por bajar el grupo siguiente, que da 6 para cifra correspondiente de la raíz, y no hay resto. Se baja el tercer grupo y tenemos 7 como "dividendo de ensayo" y 12 como "divisor de ensayo". Por tanto, la cifra siguiente de la raíz es 0. Y se continúa del mismo modo.

2.º **Halla la raíz cuadrada de 5,23 con tres cifras decimales.**

Cuando la raíz del número decimal no es exacta, como en el presente caso, se puede obtener el número de cifras decimales que se desee, bastando para ello añadir al número dado los ceros que sean necesarios.

5,230000	2,286
4	
123	42
84	
3900	448
3584	
31600	4566
27396	
4204	

Así, en este caso, como el número dado sólo tiene un grupo de dos cifras decimales, hay que añadirle a la derecha cuatro ceros, para así obtener los tres grupos necesarios.

Obtenida la raíz como si el número fuera entero, se separan de la derecha de aquélla tres cifras decimales.

La raíz pedida es **2,286.**

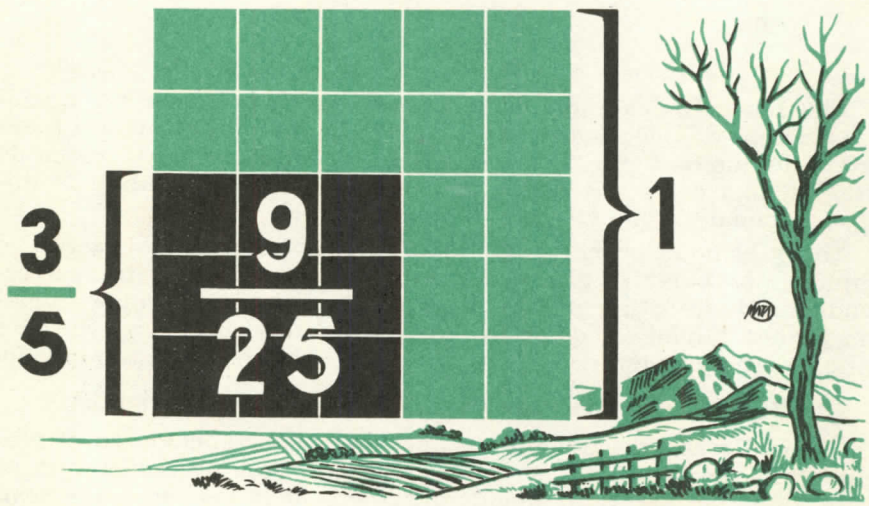
84. Raíz cuadrada de una fracción

I. La raíz cuadrada de una fracción, si el denominador es cuadrado perfecto, se obtiene extrayendo la raíz cuadrada del numerador y denominador, separadamente.

1.º $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$

porque según la definición de raíz cuadrada:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$



Observa en la figura que los $\frac{9}{25}$ del campo forman un cuadrado cuyo lado mide 3/5.

2.º $\sqrt{\frac{47}{49}} = \frac{\sqrt{47}}{\sqrt{49}} = \frac{6{,}8555\ldots}{7} = 0{,}9793$

3.º $\sqrt{\frac{744}{968}} = \sqrt{\frac{93}{121}} = \frac{\sqrt{93}}{11} = \frac{9{,}6434}{11} = 0{,}8766\ldots$

Cuando sólo el denominador es cuadrado perfecto (ejemplos 2.º y 3.º), se hace la fracción irreducible; se extrae la raíz cuadrada del numerador con varias cifras decimales y se divide el resultado por la raíz exacta del denominador.

II. En el caso de una fracción cuyo denominador no es cuadrado perfecto, se convierte la fracción en decimal.

Ejemplo:

Halla la raíz cuadrada de $2\frac{45}{59}$

$$\sqrt{2\frac{45}{59}} = \sqrt{2{,}7627\ldots} = 1{,}6621$$

EJERCICIOS

Efectúa las siguientes operaciones combinadas:

1. $\dfrac{\frac{10}{3}+\frac{5}{6}-\frac{20}{27}}{\frac{5}{6}-\frac{4}{7}}$

2. $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}}{\frac{3}{4}-\frac{5}{8}}$

3. $\dfrac{\frac{3}{4}+5}{\left(\frac{1}{10}\right)^2}$

4. $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

5. $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{1}{27}}$

6. $\dfrac{\left(\frac{4}{3}-1\right):\frac{4}{3}}{\frac{2}{7}}$

7. $\dfrac{\frac{5}{8}+\frac{3}{4}+2}{\frac{25}{4}-6}$

8. $\dfrac{\frac{17}{4}-3}{\frac{17}{4}+3}$

Halla la raíz cuadrada de los siguientes números decimales:

9. 11,56.
10. 41,2164.
11. 5,774409.
12. 304,607209.
13. 20,25.
14. 49,1401.
15. 0,00139876.
16. 2704,416016.
17. 0,6241.
18. 998,56.
19. 9,504889.
20. 67620,8016.

Halla las raíces cuadradas de:

21. $3\frac{1}{16}$
22. $1\frac{25}{144}$
23. $7\frac{18}{49}$
24. $\frac{361}{576}$

Halla con tres cifras decimales las raíces cuadradas de

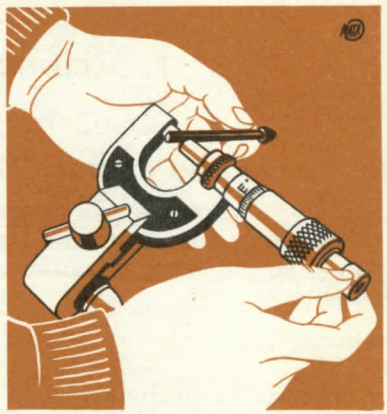
25. $\frac{1}{8}$
26. $\frac{7}{5}$
27. $\frac{5}{7}$
28. $4\frac{3}{13}$
29. $1\frac{1}{17}$
30. $\frac{8}{11}$
31. $\frac{1}{0,4}$
32. $\frac{2,5}{0,16}$

33. Si me diesen 120 pesetas podría pagar 100 pesetas que debo y me sobrarían aún $65\frac{1}{2}$ pesetas. ¿Cuánto tengo?

34. Un garrafón contiene $5\frac{3}{5}$ litros de vino. Se llenan con él 7 botellas iguales. ¿Cuál es la capacidad de cada botella?

35. Después de prensar su cosecha de uva, un viticultor obtuvo 1.430 kilogramos de residuos. Sabiendo que la uva prensada proporciona $\frac{7}{11}$ de su peso de mosto, ¿cuál era: 1.º, el peso del mosto obtenido; 2.º el peso de la uva prensada?

36. Un tornillo micrométrico penetra $\frac{2}{5}$ de milímetro por cada vuelta de la cabeza. ¿Cuántas vueltas tendrá que dar para avanzar $7\frac{1}{4}$ milímetros?



15

Fracciones decimales

85. Conversión de fracciones ordinarias en decimales

Ya que una fracción ordinaria es un cociente exacto, si se divide el numerador por el denominador, prolongando suficientemente la división, se obtendrá el número decimal o fracción decimal correspondiente.

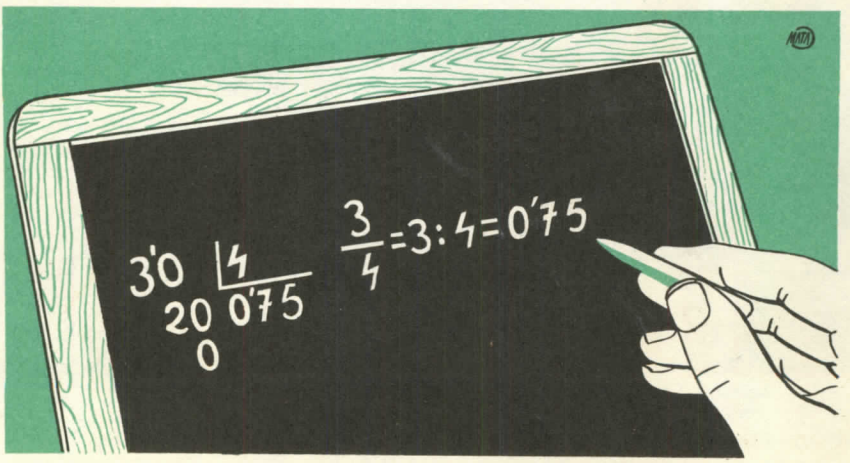
EJEMPLOS:

Convierte en decimales: 1.º $\frac{3}{4}$; 2.º $\frac{742}{875}$

1.º $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75.$

2.º $\frac{742}{875} = \frac{106 \times 7}{125 \times 7} = \frac{106}{125} = 106 : 125 = 0{,}848.$

El método anterior se aplica a todas las fracciones, pero no siempre se llega a obtener un resto nulo, y, por tanto, un cociente exacto.



EJEMPLOS:

Convierte en fracción decimal: 1.º $\frac{23}{37}$; 2.º $\frac{5}{6}$

1.º
$$\begin{array}{r|l} 230 & 37 \\ 80 & \hline 60 & 0{,}621621\ldots \\ 230 & \\ 80 & \\ 60 & \\ 23 & \end{array}$$

2.º
$$\begin{array}{r|l} 50 & 6 \\ 20 & \hline 20 & 0{,}8333\ldots \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

En estos dos ejemplos vemos que los restos se repiten periódicamente, pues en el primer ejemplo los restos 1.º, 4.º, 7.º, etc., son iguales, y en el segundo ejemplo, a partir del segundo, todos son iguales. Por tanto, si los restos se repiten periódicamente, con las cifras del cociente tiene que suceder lo mismo.

Luego, **al convertir una fracción ordinaria en decimal puede obtenerse un número decimal exacto o una expresión decimal periódica.**

Período es el conjunto de cifras que se repiten en el mismo orden. Así, en el primer ejemplo, el período es 621, y en el segundo es 3.

Estos resultados se escriben abreviadamente encerrando el período en un paréntesis o indicándolo con un arco sobrepuesto.

Así:

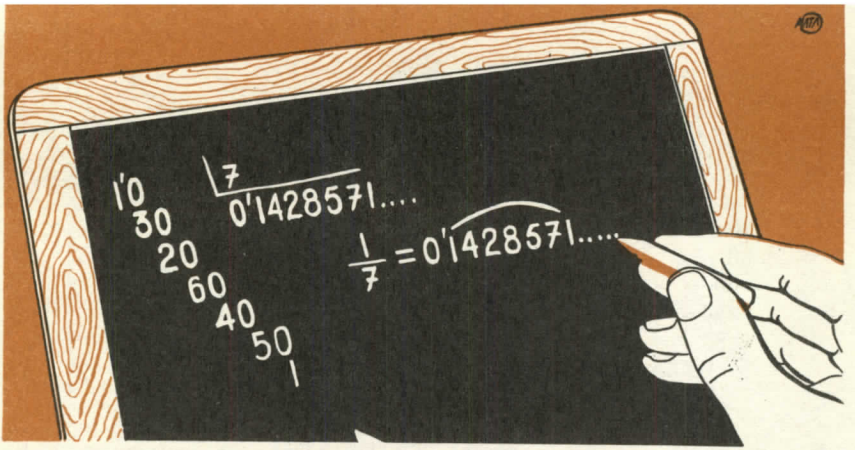
$$0{,}(621) \quad \text{ó} \quad 0{,}\overset{\frown}{621} \qquad\qquad 0{,}8(3) \quad \text{ó} \quad 0{,}8\overset{\frown}{3}$$

Las expresiones decimales periódicas se clasifican en puras y mixtas. Se llaman **puras** cuando el período empieza en la primera cifra decimal, como $0{,}\overset{\frown}{621}$; y son **mixtas** cuando el período empieza más allá de la primera cifra decimal, como $0{,}8(3)$. En estas últimas se llama **anteperíodo** a las cifras decimales que preceden al período.

86. Teorema

Se trata de convertir en decimal la fracción $\frac{1}{7}$. Al hacer la división, los restos deben ser menores que el divisor 7; luego el número de ellos, diferentes entre sí, no puede exceder de 6. En consecuencia, tiene que repetirse alguno de ellos, y, por tanto, los que le siguen se sucederán en el mismo orden, y otro tanto ocurrirá con las cifras correspondientes al cociente.

Si al convertir una fracción ordinaria en decimal no resulta una exacta, necesariamente resultará una periódica.



87. Conversión de fracciones decimales en fracciones ordinarias

Supongamos ahora que nos dan una expresión decimal como 0,16. Y queremos hallar las fracciones que le corresponden. Estas se llaman **fracciones generatrices** del decimal dado.

Fracciones generatrices de un número decimal dado, son las fracciones ordinarias que dan origen al número decimal dado.

Se comprende que un número decimal o una expresión periódica tendrán muchas generatrices, que se obtienen multiplicando los términos de la irreducible por un mismo número.

Se trata de hallar las fracciones generatrices de los números:

1.º 0,237 2.º 14,63 3.º 0,0029

Como sus valores no se alteran multiplicando y dividiendo a la vez cada uno por un mismo número, resultan las igualdades siguientes:

$$1.º \quad 0{,}237 = 237 : 10^3 = \frac{237}{1000}$$

$$2.º \quad 14{,}63 = 1463 : 10^2 = \frac{1463}{100}$$

$$3.º \quad 0{,}0029 = 29 : 10^4 = \frac{29}{10000}$$

Una fracción generatriz de un número decimal exacto, tiene por numerador el mismo decimal, sin la coma, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga.

EJERCICIOS

Convierte los siguientes decimales en fracciones irreducibles:

1. 0,65.
2. 0,85.
3. 0,36.
4. 0,44.
5. 5,38.
6. 0,0125.
7. 7,275.
8. 0,1875.

Expresa en forma de fracciones decimales:

9. $\frac{23}{100}$
10. $3\frac{9}{1000}$
11. $\frac{827}{100}$
12. $\frac{41}{100000}$
13. $\frac{7}{40}$
14. $3\frac{7}{8}$
15. $9\frac{5}{16}$
16. $1\frac{22}{25}$
17. $\frac{1}{20}$
18. $5\frac{13}{160}$

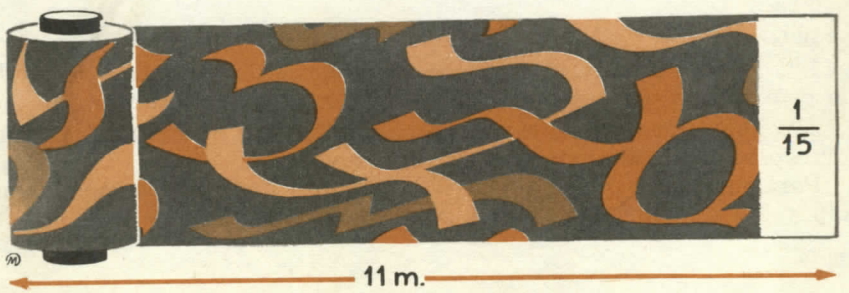
Convierte en fracciones decimales periódicas:

19. $\frac{5}{48}$
20. $2\frac{1}{13}$
21. $3\frac{4}{35}$
22. $\frac{11}{12}$
23. $7\frac{14}{33}$
24. $\frac{13}{90}$
25. $\frac{13}{44}$
26. $4\frac{2}{13}$
27. $2\frac{11}{37}$

28. Se quiere cortar en tres trozos iguales un alambre de 2 m. de largo. ¿Cuál será la longitud de cada trozo, en forma decimal?

29. Una pieza de tela reduce su longitud en $\frac{1}{15}$. ¿Qué longitud tendrá después de lavarse una pieza de 11 m?

30. Juan ha obtenido las siguientes notas medias trimestrales: Religión, $8\frac{1}{2}$; Matemáticas, $7\frac{3}{4}$; Castellano, $8\frac{1}{4}$; Francés, $6\frac{1}{2}$; Geografía, $9\frac{1}{5}$; Dibujo, $8\frac{3}{4}$. Escribe estas notas en forma decimal, halla su suma y su media.

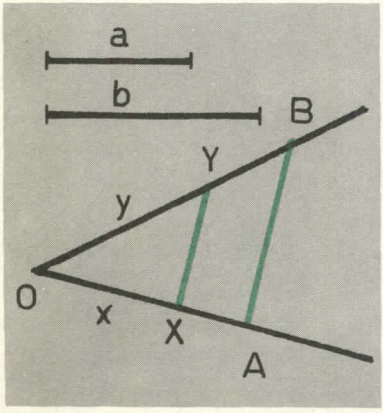


16

Proporcionalidad de segmentos

88. Definición

Vamos a establecer una correspondencia entre el conjunto S de los segmentos generales o longitudes y el mismo conjunto S. Traza dos segmentos **a** y **b**, representantes de dos clases de segmentos generales, $\overline{\mathbf{a}}$ y $\overline{\mathbf{b}}$. Igualmente, dos semirrectas con el mismo origen O. Lleva sobre la primera un representante OA de la clase $\overline{\mathbf{a}}$, y sobre la segunda otro representante OB de la clase $\overline{\mathbf{b}}$. Une A con B.



Toma ahora un segmento general cualquiera $\overline{\mathbf{x}}$, y lleva sobre OA, a partir de O, un representante suyo OX = x. Desde X traza con la escuadra la paralela a AB.

Así queda determinado en OB un segmento OY = y, representante del segmento general $\overline{\mathbf{y}}$.

Pues bien, hagamos corresponder a cada segmento $\overline{\mathbf{x}}$ el segmento $\overline{\mathbf{y}}$ que así resulta. Esta correspondencia se llama **proporcionalidad**, y se representa así

$$\overset{f}{x \to y} \quad ; \quad \frac{b}{a}(x) = y$$

Ejemplos:

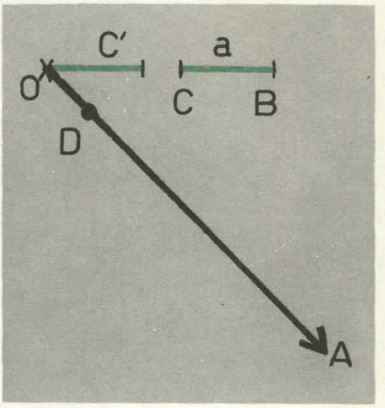
1.º Si **b** es igual que **a**, ¿cómo es **x** respecto de **y**? ¿Y si **a = 2 b**? En este último caso será **x = 2 y**. En el primer caso es **x = y**.

2.º Demuestra que la proporcionalidad de segmentos es una correspondencia biunívoca, o sea una biyección.

Para ello comprueba que a un segmento dado **x** corresponde un sólo **y**, ya que la paralela por X a AB es única (postulado de Eu-

clides); y un segmento **y** es homólogo de un sólo **x**, por la misma razón.

3.º En papel transparente traza un segmento $a = BC$, y una semirrecta OA. Por doblado, lleva sobre ésta, y a partir de O, un representante de la clase **a.** Para ello dobla de modo que B caïga sobre O, cayendo C en C'. A continuación dobla por la bisectriz de $\widehat{C'OA}$. El segmento OD cumple las condiciones impuestas.



89. Proporción

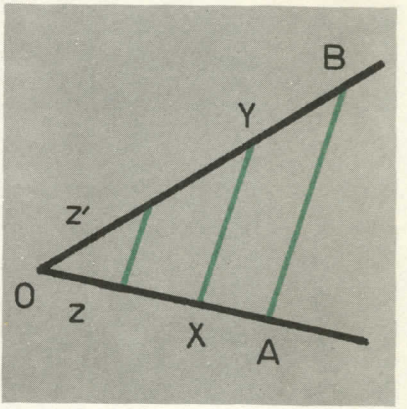
Diremos que dos proporcionalidades son iguales cuando aplicadas a un segmento **z,** lo transforman ambas en el mismo segmento **z'.**

Así las proporcionalidades $\frac{b}{a}$ e $\frac{y}{x}$ del número anterior son iguales, ya que

$$\frac{b}{a}(z) = \frac{y}{x}(z) = z'$$

De donde

$$\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$$

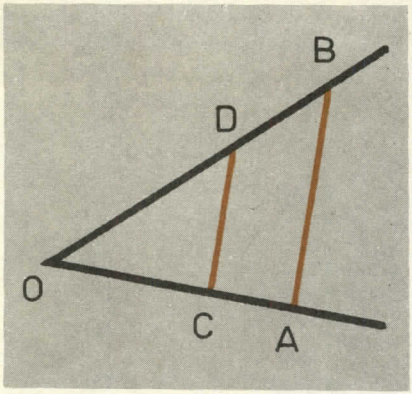


Esta igualdad se denomina **proporción.** Los dos numeradores **b** e **y** se llaman **antecedentes;** los dos denominadores, **a** y **x** se llaman **consecuentes; extremos** son el **b** y el **x; medios** son el **a** y el **y.**

Proporción es la igualdad de dos proporcionalidades.

EJEMPLOS:

1.º ¿Cómo comprobarías si dos proporcionalidades $\frac{b}{a}$ y $\frac{d}{c}$ son iguales?



Tomando a partir de O cuatro representantes:

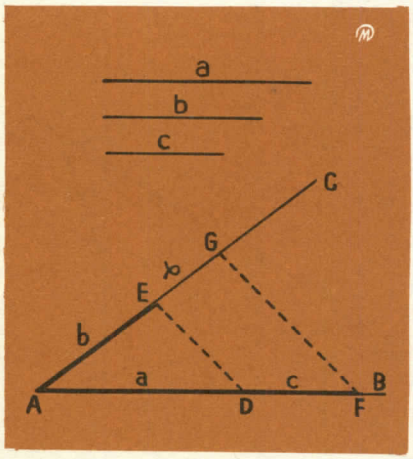
$$OA = a \quad ; \quad OB = b$$
$$OC = c \quad ; \quad OD = d$$

basta comprobar si AB y CD son paralelas.

2.º Demuestra que la igualdad de proporcionalidades antes definida es una relación de equivalencia, o sea haz ver que tiene las tres propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.

Por tanto al conjunto P de todas las proporcionalidades lo clasifica en clases de equivalencia. Cada clase la llamamos **razón.** Así la razón $\left\{\frac{b}{a}\right\}$ representa todo el conjunto de proporcionalidades iguales a la $\frac{b}{a}$. Podemos también enunciar: **proporción es la igualdad de dos razones.**

Abreviadamente podemos decir que: dos razones b/a y d/c son iguales cuando las proporcionalidades definidas por ellas lo son, y que dos proporcionalidades son iguales cuando producen el mismo efecto.



90. Construir un segmento que forme proporción con tres segmentos dados (cuarta proporcional)

Sean **a, b, c,** los segmentos dados. Se pide un segmento **x** tal que:

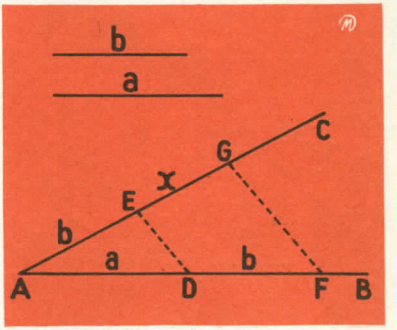
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Construcción: Sobre los lados del ángulo BAC se llevan **a, b, c,** como indica la figura. Se traza DE y luego FG || DE. EG es la cuarta proporcional pedida.

91. Hallar la tercera proporcional a dos segmentos dados

Dados dos segmentos **a** y **b**, se llama **tercera proporcional** a los mismos, al cuarto término de la proporción continua

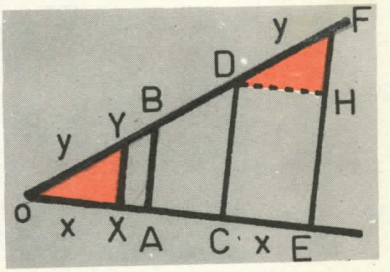
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$



Construcción: Sobre los lados del ángulo BAC se llevan **a, b,** y **b,** como indica la figura. Se unen D y E, y se traza luego FG paralela a DE. EG es la tercera proporcional pedida.

92. Propiedades de la proporcionalidad.

Comprueba que cualquiera que sea la posición del segmento **x** en la semirrecta OA, el segmento **y** que se obtiene en OB es el mismo.



Toma **x** en CE, por ejemplo, y traza por C y E paralelas a AB. Comprueba por superposición que DF = = OY. Comprenderás que sería enormemente largo comprobar esto para todas las posiciones de **x**. Es preferible que te convenzas por razonamiento que esto ha de ser cierto siempre.

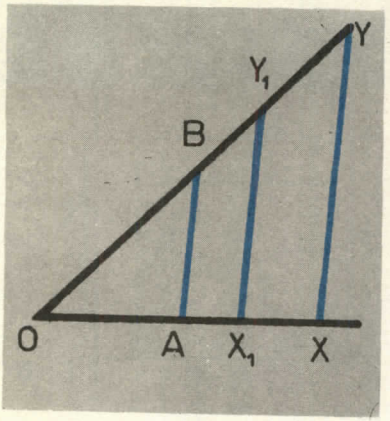
Para ello traza por D una paralela a OA, con lo que se forma el triángulo DFH que demostrarás es igual al OXY. Tienen, en efecto, DH = = OX, por ser ambos iguales al CE, el primero por paralelas entre paralelas, y el segundo por hipótesis. Además

$$\hat{D} = \hat{O} \quad ; \quad \hat{F} = \hat{Y}$$

por correspondientes entre paralelas. Luego los terceros ángulos tienen que ser iguales, $\hat{X} = \hat{H}$; y por tanto, los triángulos, según el segundo caso de igualdad de triángulos. O sea DF = OY.

Tenemos así demostrada la propiedad

1º **Una proporcionalidad hace corresponder a segmentos iguales segmentos también iguales.**



En la proporcionalidad de la figura, ¿qué segmento corresponde al OX_1?, ¿y al X_1X?, ¿y al OX?

$$OX_1 \rightarrow OY_1$$

es decir

$$\frac{b}{a}(OX_1) = OY_1$$

$$X_1X \rightarrow Y_1Y$$

es decir

$$\frac{b}{a}(X_1X) = Y_1Y$$

$$\frac{b}{a}(OX_1 + X_1X) = \frac{b}{a}(OX) = OY = OY_1 + Y_1Y =$$

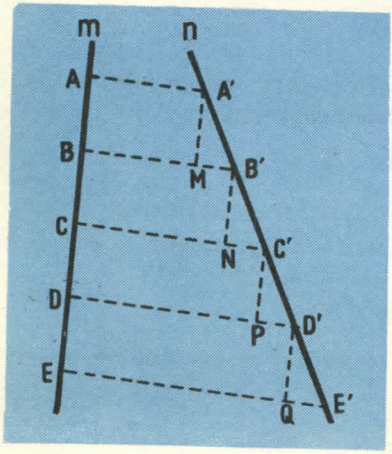
$$= \frac{b}{a}(OX_1) + \frac{b}{a}(X_1X)$$

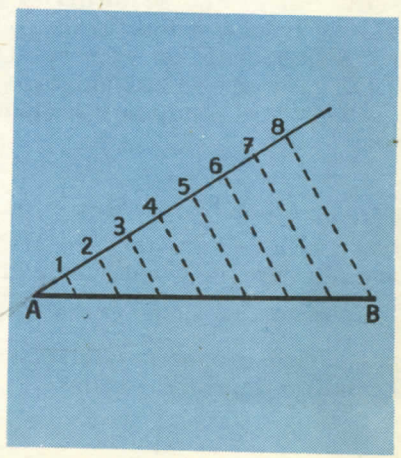
Luego al segmento suma le corresponde la suma de los correspondientes.

2.º **Una proporcionalidad hace corresponder a la suma de dos segmentos $x_1 + x$, la suma de sus correspondientes $y_1 + y$.**

EJEMPLOS:

1.º Demuestra que, si en la recta **m** tomamos segmentos iguales $AB = BC = CD = DE$, y trazamos por los puntos de división una





serie de rectas paralelas entre sí, éstas determinan en otra recta **n** segmentos también iguales: A'B' = B'C' = C'D' = D'E'.

2.º Divide un segmento AB en **n** partes iguales.

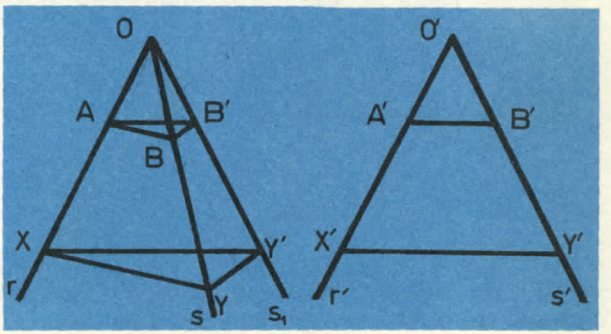
Sea n = 8. Tracemos una recta auxiliar indefinida y llevemos en ella 8 segmentos iguales. Unamos al punto 8 con B y por los demás puntos tracemos otras tantas paralelas a 8 B.

El segmento AB quedará dividido en 8 partes iguales.

93. Una proporcionalidad es un isomorfismo

La proporcionalidad definida mediante dos semirrectas **r** y **s**, ¿será la misma que la definida por otras dos semirrectas cualesquiera **r'** y **s'**?

Para comprobarlo, tomemos segmentos iguales en las dos construcciones: OA = O'A'; OB = O'B'; OX = O'X', y determinemos los transformados de estos últimos. ¿Será también OY = O'Y'? Para comprobarlo lleva, mediante un movimiento, la semirrecta **r'** a coincidir con la semirrecta **r**, con lo que A' cae en A y X' en X. La semirrecta **s'** toma la posición s_1; AB' es paralelo a XY', por hipótesis, y AB lo es a XY; OB = OB', luego BB' es perpendicular a la bisectriz del ángulo BOB'. Si OY' = OY, se verificará del mismo modo que YY' es perpendicular a dicha bisectriz. Luego YY' es paralela a BB'. Comprueba que esto es cierto, y, por tanto, que O'Y' = OY, siendo la misma la proporcionalidad definida por **r**, **s** y por **r'**, **s'**.



Fue Desargues quien primero demostró el teorema anterior: es el **teorema reducido de Desargues.**

Como consecuencia, deducimos que, dados **a** y **b**, la proporcionalidad $\frac{b}{a}$ hace corresponder a cada **x** un único **y**, y todo segmento general es imagen en esta correspondencia de un único **x**. Por consiguiente, la proporcionalidad $\frac{b}{a}$ es una biyección.

segmentos iguales

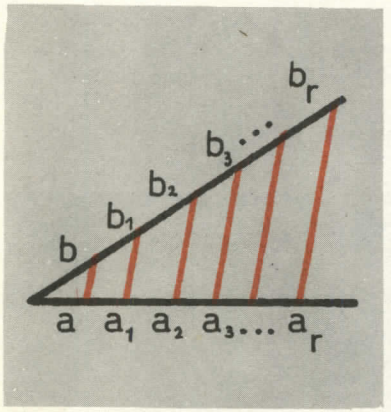
Como además

$$\frac{b}{a}(x+y) = \frac{b}{a}(x) + \frac{b}{a}(y)$$

se dice que dicha correspondencia es un **isomorfismo:** el homólogo de la suma es igual a la suma de los homólogos.

94. Segmentos proporcionales

En la proporcionalidad definida por los segmentos **a** y **b**, construye los correspondientes a los segmentos $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, ..., $\mathbf{a_r}$. Son los $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$, ..., $\mathbf{b_r}$. Diremos que los segmentos **a**, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, ..., $\mathbf{a_r}$ son proporcionales a los segmentos **b**, $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$, ..., $\mathbf{b_r}$, verificándose las siguientes igualdades entre proporcionalidades



$$\frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \ldots = \frac{b_r}{a_r}$$

El matemático griego Thales de Mileto fue quien primero demostró que **un sistema de rectas paralelas determinan sobre dos concurrentes segmentos proporcionales.** Por eso al teorema anterior se llama **teorema de Thales.**

EJEMPLOS:

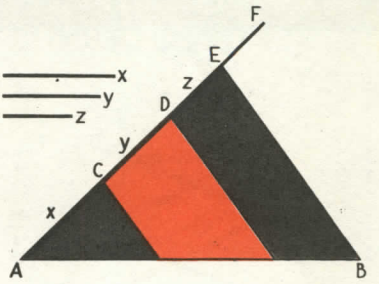
1.º Para poder decir que varios segmentos son proporcionales, ¿cuántos tiene que haber por lo menos?

Tiene que haber por lo menos cuatro, tales como **a**, **b**, **c** y **d**, que formen una proporción

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

2.º Divide un segmento AB en segmentos proporcionales a varios segmentos dados.

Sean AB, **x**, **y**, **z** los segmentos dados.



Construcción: Por A se traza una semirrecta indefinida. Sobre ella se llevan los segmentos **x**, **y**, **z**, sucesivamente. Se une B con el punto de división más alejado, E. Se trazan paralelas a BE por los puntos de división C y D; éstas determinan en AB segmentos **x'**, **y'**, **z'**, que son las partes requeridas de AB; pues se tiene:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}$$

95. Cambio de medios o extremos de la proporción

Si los segmentos a y b son proporcionales a los segmentos c y d, o sea si

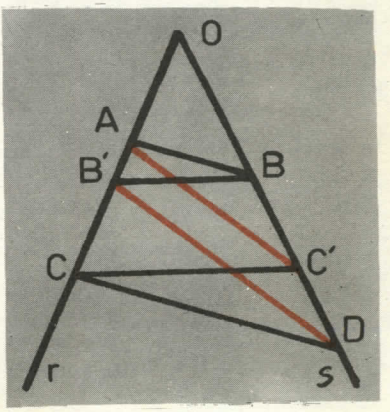
$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \qquad (1)$$

entonces también a y c son proporcionales a b y d, o sea

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} \qquad (2)$$

Para comprobarlo toma dos semirrectas **r** y **s**, incidentes en O y en ellas lleva los segmentos OA = a, OB = b, OC = c y OD = d.

Por la hipótesis del enunciado es AB paralela a CD. Toma ahora OB' = OB y OC' = OC. Resulta que las dos rectas BB' y CC' son perpendiculares a la bisectriz del ángulo AOB, luego son paralelas entre sí. Comprueba que entonces también es AC' || B'D (configuración de Pappus). Y por tanto es

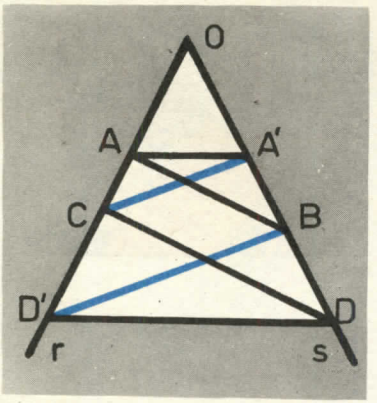


$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

según queríamos comprobar.

EJEMPLOS:

1.º Comprueba del mismo modo que en una proporción se pueden



cambiar los medios, o sea que de (1) se deduce

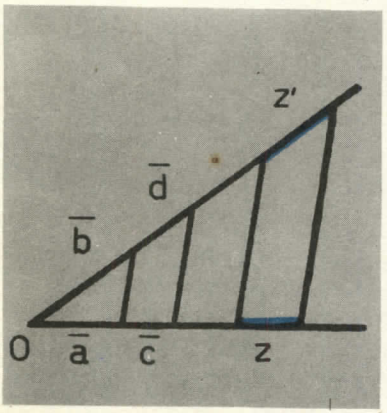
$$\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$$

Para ello toma OA' = OA y OD' = OD. Por ser AB || CD y AA' || DD', según la configuración de Pappus es BD' || A'C, luego

$$\frac{OB}{OD'} = \frac{OA'}{OC} \; ; \; \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$$

2.º ¿De cuántas maneras diferentes podrías escribir la proporción (1)?

96. Suma de antecedentes y de consecuentes en una proporción.



Dada la proporción

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \qquad (1)$$

¿a cuál otra es igual la proporcionalidad

$$\frac{b + d}{a + c} \quad ?$$

Observa que la proporcionalidad

$$\frac{b + d}{a + c}$$

transforma el segmento z en el z', y la proporcionalidad $\frac{b}{a}$ también transforma el z en el z'. Luego las dos proporcionalidades son iguales. O sea, se verifica

$$\frac{b + d}{a + c} = \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \qquad (4)$$

En una proporción, la suma de antecedentes es a la suma de consecuentes, como un antecedente es a su consecuente.

EJEMPLOS:

1.º Dada la proporción (1), ¿a cuál otra es igual la proporcionalidad $\frac{b+a}{a}$?

Observa que de (1) deducimos

$$\frac{b}{d} = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{b+a}{d+c} = \frac{a}{c}$$

Luego

$$\frac{b+a}{a} = \frac{d+c}{c}$$

2.º Demuestra del mismo modo que

$$\frac{b+a}{b} = \frac{d+c}{d} \; ; \; \frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d} \; ; \; \frac{b+a}{b-a} = \frac{d+c}{d-c}$$

EJERCICIOS

1. Construye la cuarta proporcional a tres segmentos de 6, 9 y 8 cm. ¿Cuánto mide dicha cuarta proporcional?

2. Divide un segmento de 18 cm en tres partes que sean proporcionales a tres segmentos de 1, 2 y 3 cm. Di cuánto mide cada una de dichas partes.

3. Halla gráficamente la tercera proporcional a dos segmentos de 8 y 12 cm, respectivamente. ¿Cuál es la medida de dicha tercera proporcional?

4. Construye el segmento tercero proporcional a dos segmentos de 2 y 4 cm.

5. Una recta paralela a un lado de un triángulo determina sobre un segundo lado dos segmentos de 36 mm y 14 mm. Halla gráficamente los segmentos (y su medida) determinados en el tercer lado que tiene de longitud 60 mm.

6. Divide un segmento de 51 mm en dos partes que sean proporcionales a dos segmentos de 5 y 12 mm. Di la medida de cada una de las partes.

7. Construye dos rectas m y n tales que dos rectas paralelas intercepten sobre ellas segmentos de 24 y 36 mm, respectivamente. Otro par de paralelas a las anteriores interceptan en m un segmento de 50 mm. Halla gráficamente la medida del segmento que limita en n.

8. Sobre un lado de un ángulo O se tienen los segmentos O A = 10 mm y O B = 35 mm. Sobre el otro lado se tienen O A' = 16 mm y O B' = 56 mm. Son paralelas A A' y B B'?

9. ¿En qué punto corta a la hipotenusa la mediatriz de un cateto?

10. ¿Cómo se puede tomar los 4/7 de un segmento dado? Hazlo gráficamente con dos segmentos de 42 mm.

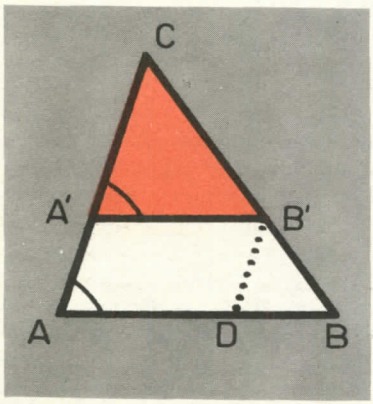
11. Divide un segmento A B en 5 partes iguales. Toma un segmento que sea los 2/5 del segmento A B.

17

Semejanza de triángulos

97. Teorema fundamental

En el triángulo ABC tracemos una paralela A' B' a la base del mismo. Se obtiene el triángulo A' B' C, de la misma forma que el ABC, pero más pequeño. Se verifican las relaciones siguientes:



$\left.\begin{matrix}\hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}'\end{matrix}\right\}$ por correspondientes entre paralelas,

$C = \hat{C}$ común

$$\frac{A'C}{AC} = \frac{B'C}{BC} \qquad (1)$$

según lo estudiado en la lección anterior. Si ahora trazamos por B' una paralela al lado AC, sea B' D, obtenemos

$$\frac{B'C}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{A'B'}{AB} \qquad (2)$$

ya que AD = A' B', por paralelas entre paralelas. De (1) y (2) deducimos que

$$\frac{A'C}{AC} = \frac{B'C}{BC} = \frac{A'B'}{AB}$$

Entre los triángulos A'B'C y ABC podemos definir una correspondencia tal que

$$A' \to A \quad ; \quad B' \to B \quad ; \quad C \to C$$

en la que los ángulos correspondientes a vértices homólogos son

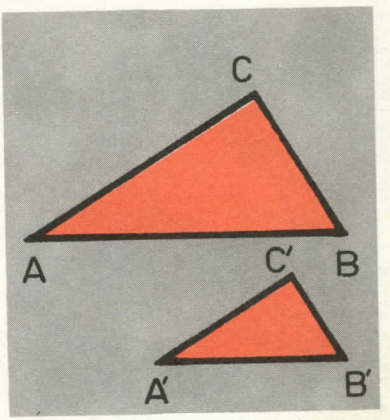
iguales, y los lados que unen vértices homólogos son proporcionales. Dichos triángulos se llaman **semejantes,** o que tienen la **misma forma.**

Triángulos en posición de Thales.—Dos triángulos, como los ABC y A'B'C de la figura anterior, que tienen un ángulo común y los lados opuestos a éste paralelos se llaman **triángulos en posición de Thales.**

Los triángulos en posición de Thales tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales, o sea son semejantes.

98. Definición general de semejanza de triángulos

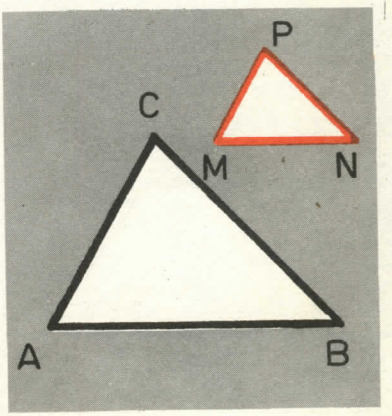
Dos triángulos ABC y A'B'C' se llaman semejantes cuando entre ellos se ha establecido una correspondencia biunívoca llamada semejanza, tal que: 1.º cada vértice del primero posee un único homólogo en el segundo, y recíprocamente; 2.º los ángulos cuyos vértices son puntos homólogos son iguales; 3.º los lados que unen vértices homólogos son proporcionales.



EJEMPLOS:

1. Con las regletas 3, 4 y 5 de los números en color construye un triángulo; otro con las regletas, 6, 8 y 10. ¿Cómo son dichos triángulos?

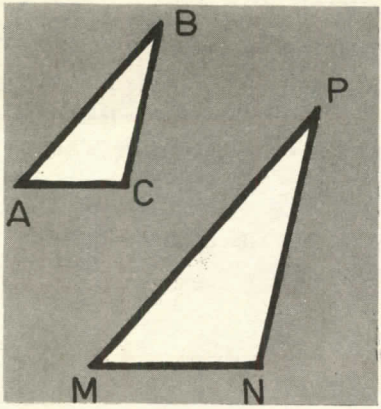
2. Dados los triángulos ABC y MNP de la figura, ¿cómo definirías la correspondencia entre sus vértices para que sean semejantes? ¿Qué relación existe entre sus ángulos homólogos y entre sus lados homólogos?



99. Construcción de triángulos semejantes.

1.º Dibuja un triángulo ABC. ¿Cómo obtendrás otro triángulo semejante a él?

Basta que traces una paralela a un lado, de modo que corte a los otros dos lados.



2.º Dibuja un △ ABC y un punto M fuera del mismo. Construye un triángulo MNP, semejante al ABC, uno de cuyos vértices sea el M.

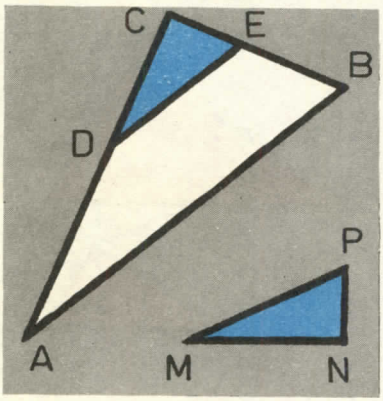
Traza por M paralelas a AB y AC y córtalas por una tercera paralela PN ∥ BC.

3.º Dibuja un triángulo ABC y un segmento MN. Dibuja un triángulo MNP semejante al ABC, uno de cuyos lados sea el MN.

Toma CD = MN; por D traza la paralela DE al lado AB. Luego calca el triángulo CDE sobre MN.

¿Por qué son semejantes los triángulos CDE y ABC?

Por el teorema fundamental del número 97.



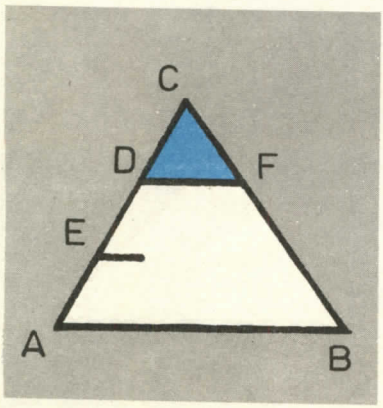
4.º Construye un triángulo semejante al △ ABC, y cuyos lados sean la tercera parte de los de aquél.

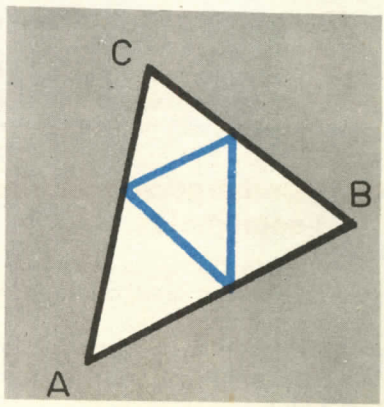
Divide AC en tres partes iguales, y por el punto de división D traza una paralela a AB.

El triángulo CDF resuelve el problema.

¿Por qué △ CDF y △ ABC son semejantes?

5.º ¿Serías capaz de descomponer un △ ABC en otros cuatro semejantes a él?

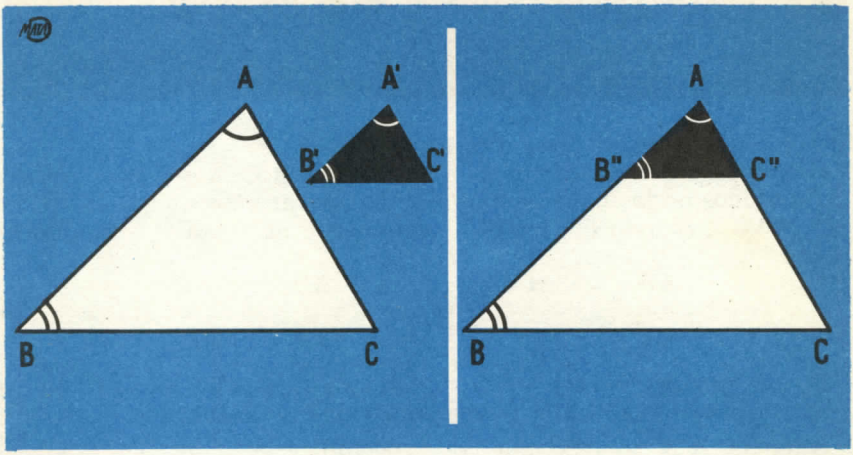




Observa la figura y explica cómo lo harías.

100. Criterios de semejanza de triángulos

Para asegurar que dos triángulos son semejantes no es necesario comprobar que se cumple la igualdad de los tres ángulos y la proporcionalidad de los tres lados. Basta que se realicen algunas de estas condiciones, las cuales constituyen los llamados **criterios** o **casos de semejanza de triángulos.**



1.º Los dos triángulos ABC y A' B' C' tienen $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$. ¿Serán semejantes dichos triángulos?

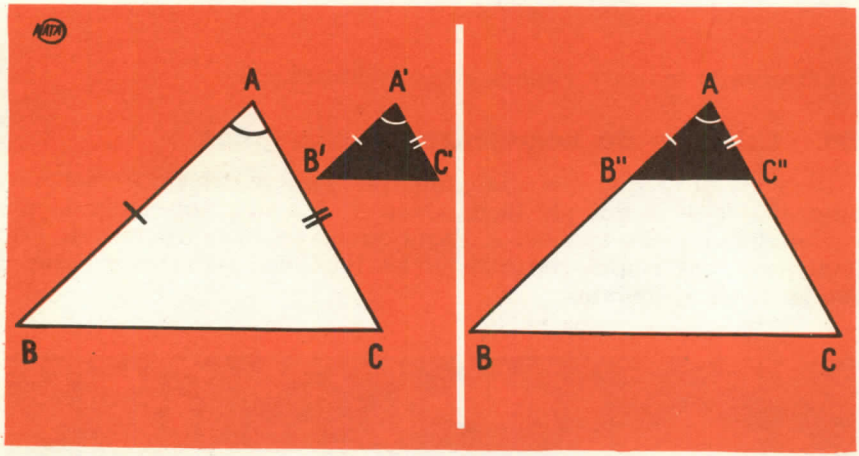
Observa que si tomas AB" = A'B', y por B" trazas B"C" // BC, obtienes un triángulo AB"C", semejante al $\triangle$ ABC, y por otra parte igual al A'B'C', por tener AB" = A'B', $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B}$" = $\hat{B}'$ por ser ambos iguales al $\hat{B}$. Luego $\triangle$ A'B'C' $\sim$ $\triangle$ ABC (*).

Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos de uno respectivamente iguales a dos ángulos del otro.

2.º Los dos triángulos ABC y A'B'C' de la figura tienen $\hat{A} = \hat{A}'$, y además

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \qquad (3)$$

(*) El símbolo $\sim$ significa "semejante".



¿Serán semejantes dichos triángulos?

Efectivamente, repitamos la misma construcción del caso anterior y basándonos en las nuevas hipótesis demostraremos que $\triangle$ AB"C" = $= \triangle$ A'B'C'. Siendo el $\triangle$ AB"C" semejante al $\triangle$ ABC, podemos escribir:

$$\frac{AB}{AB"} = \frac{AC}{AC"}, \quad \text{o sea} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AC"} \qquad (4)$$

De las igualdades (4) y (3) deducimos que A'C' = AC", porque la cuarta proporcional a tres segmentos dados es única.

Además, A'B' = AB" por construcción, y $\hat{A} = \hat{A'}$ por hipótesis. Luego $\triangle$ AB"C" = $\triangle$ A'B'C', y por tanto, este último es semejante al $\triangle$ ABC.

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados de uno respectivamente proporcionales a dos lados del otro y los ángulos comprendidos entre ellos son iguales.

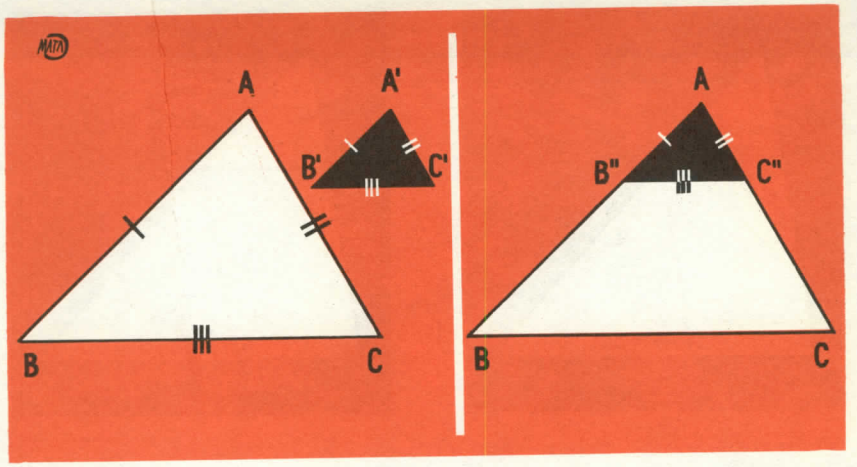
3.º Los dos triángulos ABC y A'B'C' tienen los tres lados de uno proporcionales a los tres lados del otro, o sea

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \qquad (5)$$

¿Serán semejantes dichos triángulos?

Repitamos la misma construcción que en el primer caso. Tendremos:

$$\frac{AB}{AB"} = \frac{AC}{AC"} = \frac{BC}{B"C"}$$



esto es, por ser AB" = A'B':

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AC''} = \frac{BC}{B''C''} \qquad (6)$$

Inmediatamente se deduce de las igualdades (5) y (6) que AC" = A'C' y B"C" = B'C'. Luego $\triangle$ A' B' C' = $\triangle$ AB"C", por tener sus tres lados respectivamente iguales, y, por tanto, el $\triangle$ A'B'C' es semejante al $\triangle$ ABC.

Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados de uno proporcionales a los tres lados del otro.

EJEMPLOS:

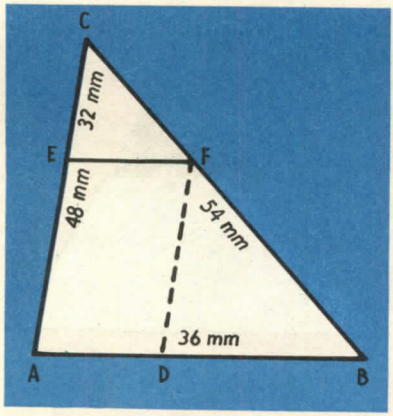
1.º *Si en la figura los lados miden:* $\overline{AC}$ = 48 *mm.,* $\overline{CB}$ = 54 *mm. y* $\overline{AB}$ = 36 *mm. y se toma* $\overline{CE}$ = 32 *mm., ¿qué valor habrá que dar a* $\overline{CF}$ *para que EF sea paralela a AB, y cuánto medirá EF?*

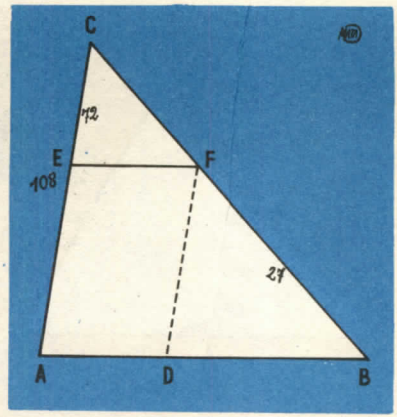
Se tiene que *la razón de dos segmentos es igual a la razón de sus medidas,* y por tanto

$$\frac{\overline{CF}}{32 \text{ mm.}} = \frac{54 \text{ mm.}}{48 \text{ mm.}} \quad ; \quad \overline{CF} = \frac{32 \text{ mm.} \times 54 \text{ mm.}}{48 \text{ mm.}} = 36 \text{ mm.}$$

$$\frac{\overline{EF}}{32 \text{ mm.}} = \frac{36 \text{ mm.}}{48 \text{ mm.}} \quad ; \quad \overline{EF} = \frac{32 \text{ mm.} \times 36 \text{ mm.}}{48 \text{ mm.}} = 24 \text{ mm.}$$

2.º *Si en la figura se dan:* $\overline{CA}$ = 108 *m.,* $\overline{CE}$ = 72 *m. y* $\overline{FB}$ = 27 *metros, hallar* $\overline{CB}$ *y* $\overline{CF}$.





Será $\overline{AE} = 108$ m. $-$ 72 m. $=$ 36 m. Luego:

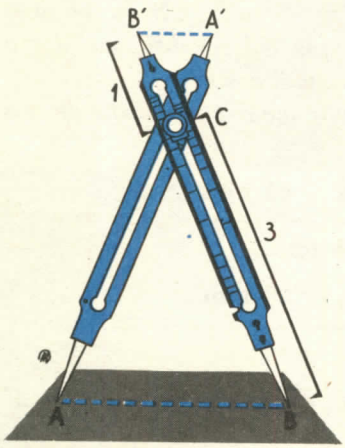
$$\frac{36 \text{ m.}}{27 \text{ m.}} = \frac{108 \text{ m.}}{\overline{BC}} \quad ; \quad \overline{BC} = \frac{108 \text{ m.} \times 27 \text{ m.}}{36 \text{ m.}} = 81 \text{ m.}$$

$$\frac{36 \text{ m.}}{27 \text{ m.}} = \frac{72 \text{ m.}}{\overline{CF}} \quad ; \quad \overline{CF} = \frac{72 \text{ m.} \times 27 \text{ m.}}{36 \text{ m.}} = 54 \text{ m.}$$

Comprobación: $\overline{FB} = \overline{CB} - \overline{CF} = 81$ m. $-$ 54 m. $=$ 27 m.

101. Compás de reducción

Se emplea para reducir o ampliar varios segmentos en la misma razón y, por tanto, trazar triángulos semejantes.



Consta de dos varillas o brazos, con una ranura a todo lo largo de los mismos, por la que se desliza una pieza que hace de eje de giro y que puede fijarse mediante un tornillo de presión en un punto cualquiera de las varillas.

Si, por ejemplo, hemos fijado la pieza de modo que BC $=$ 3 $\times$ B'C y también AC $=$ 3 $\times$ A'C, entonces los triángulos ABC y A'B'C son semejantes, ya que los ángulos en C son iguales, por opuestos, por el vértice. Luego igualmente será AB $=$ 3 A'B'.

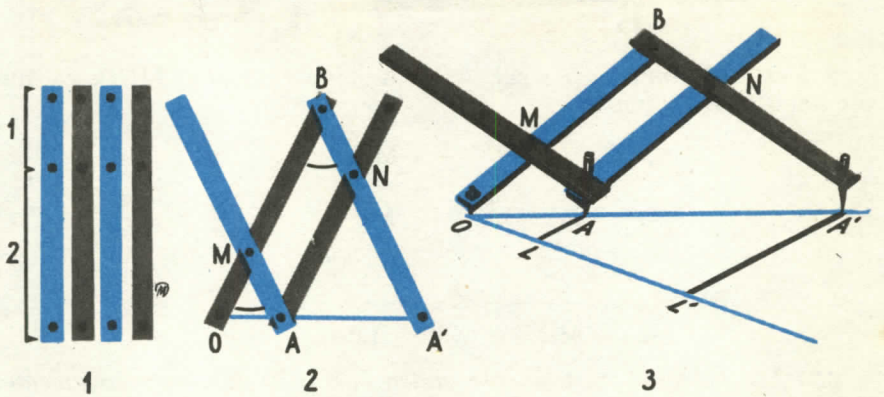
El segmento AB ha quedado reducido a la tercera parte. Abriendo más

o menos las dos ramas, reducimos siempre a la tercera parte cualquier segmento.

102. El pantógrafo

Cortemos cuatro tiras iguales de cartón y hagamos en sus extremos unos agujeritos, como indica la figura 1. Hagamos otro agujerito en el interior, de modo que uno de los trozos sea doble del otro.

Coloquemos ahora las cuatro tiras como indica la figura 2, y atravesemos los agujeritos con encuadernadores. El aparato así formado se llama **pantógrafo,** y tiene importantes aplicaciones.



1 2 3

Pasemos la punta de un lápiz por los orificios A, como indica la figura 3, y la de otro lápiz por el agujero A'. Veremos que al describir el primer lápiz un segmento AL, el segundo lápiz describe otro segmento A'L', paralelo al anterior y tres veces mayor.

En efecto, el triángulo OA'B es semejante al triángulo OAM (sus lados son paralelos y tres veces mayores, según la construcción). Luego también son semejantes los triángulos OA'L' y OAL, y sus lados son tres veces mayores.

Por tanto, si el primer lápiz sigue el contorno de un triángulo, el segundo dibujará otro triángulo semejante, con los lados tres veces mayores.

En el comercio se venden pantógrafos de metal o de madera, en los que se pueden variar las articulaciones A, B, M y N de modo que pueda variar la escala de reducción.

103. Aplicación a algunos ejemplos

1.º *¿Cuál es la altura de la torre BV, sabiendo que produce una sombra BA de 32 m. al mismo tiempo que un bastón MN de 1,20 m. proyecta una sombra MP de 1,50 m?*

Solución: Se tendrá, por ser $\triangle$ BVA semejante al $\triangle$ MNP, ya que sus ángulos son iguales

$$\frac{\overline{BV}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{MP}}$$

$$\overline{BV} = \frac{\overline{BA} \times \overline{MN}}{\overline{MP}} = \frac{32 \times 1{,}2}{1{,}5} = 25{,}6 \text{ m.}$$

2.º *Los lados de un triángulo miden 7, 8 y 10 dm., respectivamente. Hallar los lados de un triángulo semejante cuyo perímetro es 75 dm.*

Llamando **x, y, z** los lados pedidos, se tendrá:

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{8} = \frac{z}{10} = \frac{75 \text{ dm}}{7 + 8 + 10}$$

$$x + y + z = 75 \text{ dm}$$

Luego basta dividir 75 dm en partes proporcionales a 7, 8 y 10:

$$x = \frac{75 \text{ dm} \times 7}{25} = 21 \text{ dm.} \quad ; \quad y = \frac{75 \text{ dm} \times 8}{25} = 24 \text{ dm.}$$

$$x = \frac{75 \text{ dm} \times 10}{25} = 30 \text{ dm.}$$

EJERCICIOS

1. Los lados de un triángulo miden 7 m, 8 m y 10 m. En un triángulo semejante, el lado correspondiente al de 8 m mide 16 m. Hallar los otros lados del segundo triángulo.

2. En el triángulo $A\,B\,C$ es $\overline{A\,B} = 6$ dm, $\widehat{A} = 40^{\circ}$ y $\widehat{B} = 105^{\circ}$. En el triángulo $A'\,B'\,C'$, semejante a él, es $\overline{A'\,B'} = 9$ dm, $\widehat{A'} = 40^{\circ}$ y $\widehat{B'} = 105^{\circ}$. ¿Cuál es la longitud de $A'\,C'$ comparada con la de $A\,C$? ¿Cuál es el valor de $\widehat{C'}$ comparado con $\widehat{C}$?

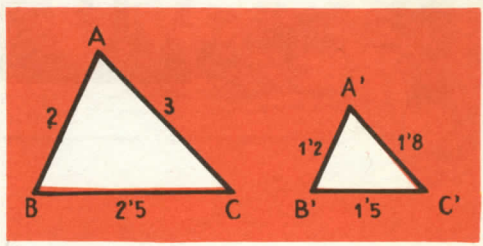
3. En los triángulos $D\,E\,F$ y $D'\,E'\,F'$, $\widehat{D} = \widehat{D'}, \widehat{F} = \widehat{F'}$ y $D\,F = 1{,}5\ .\ D'\,F'$. Compara $D\,E$ y $D'\,E'$, $E\,F$ y $E'\,F'$.

4. Halla la altura de una torre que proyecta una sombra de 45 m sabiendo que en el mismo instante un muro de 3 m da una sobra de 5 m.

5. Un poste vertical de 3 m proyecta una sombra de 2 m; ¿qué altura tiene un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 4,5 m?

6. La figura representa una escalera de 10 m que está apoyada contra una pared. El pie de la escalera dista de la pared 1,6 m. ¿Cuánto dista de la pared un escalón que está a 2,3 metros del extremo de la escalera que se apoya en el suelo?

7. Comprueba que los triángulos de la figura son semejantes. ¿Cuál es la razón de semejanza, o sea, entre dos lados correspondientes?



8. Los lados de un triángulo rectángulo son de 30, 40 y 50 m. Demostrar que otro triángulo, cuyos lados miden 12, 16 y 20 decímetros, es semejante al anterior.

9. Dado un triángulo escaleno, ¿cómo se puede construir otro triángulo semejante cuyos lados sean de doble longitud que los del primero?

10. En el $\triangle\ A\,B\,C$ es $\overline{A\,B} = 3$ cm., $\overline{B\,C} = 4$ cm., $\overline{A\,C} = 6$ cm. En el $\triangle\ X\,Y\,Z$ es $\overline{X\,Y} = 12$ cm., $\overline{X\,Z} = 6$ cm., $\overline{Y\,Z} = 8$ cm. ¿Son semejantes dichos triángulos? ¿Por qué?

11. En el $\triangle\ A\,B\,C$ es $\overline{A\,B} = 6$ m., $\overline{B\,C} = 8$ m. y $\widehat{B} = 62^{\circ}$. En el $\triangle\ A'B'C'$ es $\overline{A'B'} = 9$ m., $\overline{B'C'} = 12$ m. y $\widehat{B'} = 62^{\circ}$. Hallar cuánto vale $\overline{A'C'}$ respecto de $\overline{A\,C}$.

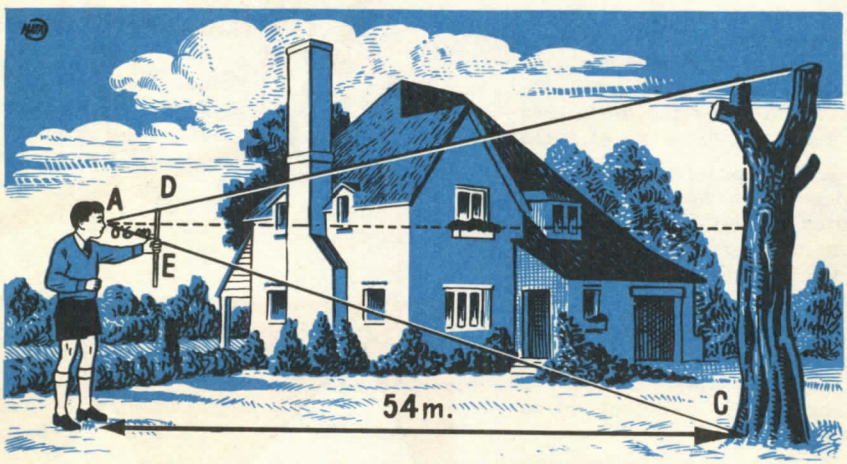
12. En los triángulos $A\,B\,C$ y $A'B'C'$ se tiene: $A'B' = 3\ .\ A\,B$, $B'C' = 3\ .\ B\,C$ y $\widehat{B'} = \widehat{B}$. ¿Qué se puede decir acerca de $C'A$ y de $C\,A$, y de $\widehat{C'}$ y $\widehat{C}$?

13. El perímetro de un triángulo es 15 cm. y los lados de un triángulo semejante son 4,5 cm., 6,4 cm. y 7,1 cm. Hallar las longitudes de los lados del primer triángulo.

14. Las longitudes de los lados de un campo triangular son 125 m., 75 m. y 100 m. Se hace a escala un dibujo del campo, y el lado mayor queda representado por un segmento de 3 cm. ¿Cuáles son las longitudes de los otros dos lados del triángulo en el dibujo?

15. Calcula la altura de una chimenea de una fábrica que proyecta una sombra de 15 m. y 6 dm. si en el mismo instante una vara de 2 m. proyecta una sombra de 0,8 m.

16. Para hallar la altura de un árbol un muchacho puso un palo como indica la figura. La longitud del alcance del muchacho es 0,60 m. y la medida de DE es 0,15 m.; la distancia del árbol al muchacho es 54 m. Hallar la altura del árbol. (Observa que las bases de los triángulos son proporcionales a sus alturas.)



18

Semejanza de polígonos

104. Figuras semejantes

Con frecuencia encontramos adornos, fotografías, mapas, etc., que reproducen figuras de la misma forma pero de distinto tamaño. Tales figuras se llaman **semejantes.** Así la fotografía y su ampliación de la figura son semejantes.

"De la misma forma" significa que los ángulos correspondientes de las dos figuras son iguales y, que los segmentos que unen puntos correspondientes son, respectivamente, proporcionales. O sea: **Dos figuras son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales, y sus segmentos respectivamente proporcionales.**

105. Polígonos semejantes

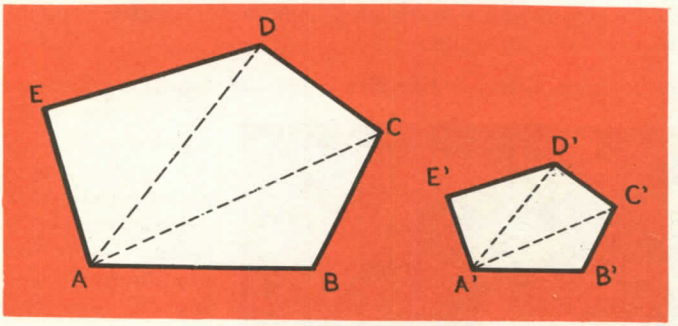
Polígonos semejantes son aquellos cuyos ángulos son respectivamente iguales, y sus lados proporcionales.

Así, en la figura los polígonos ABCDE y A'B'C'D'E' son semejantes si:

$$\widehat{A} = \widehat{A'} \quad ; \quad \widehat{B} = \widehat{B'} \quad ; \quad \widehat{C} = \widehat{C'} \quad ; \quad \widehat{D} = \widehat{D'} \quad ; \quad \widehat{E} = \widehat{E'}$$

y

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = k \qquad [1]$$



En los polígonos semejantes se llaman **ángulos homólogos o correspondientes** los respectivamente iguales, como $\widehat{A}$ y $\widehat{A'}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{B'}$ $\widehat{C}$ y $\widehat{C'}$.

Vértices homólogos son los de ángulos homólogos.

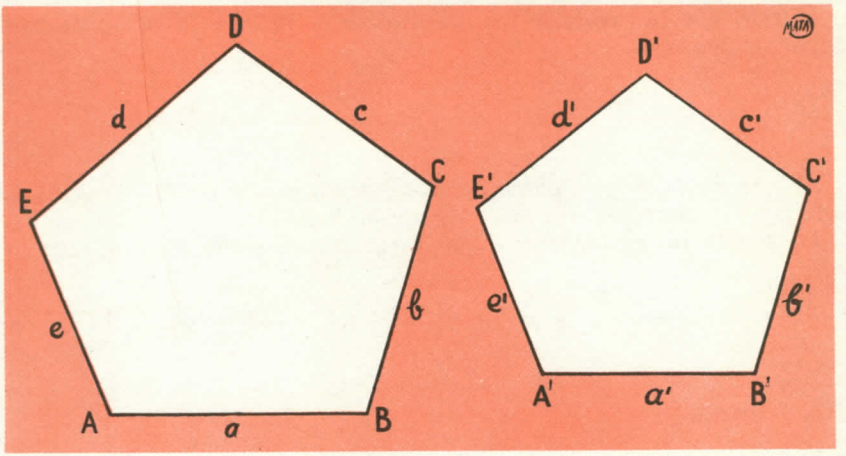
Lados homólogos son los que unen vértices homólogos, como AB y A'B', BC y B'C', CA y C'A'.

Razón de semejanza de dos polígonos semejantes es el cociente constante **k** de las medidas de cada dos lados homólogos.

De las igualdades [1] se deduce:

$$AB = k \times A'B' \quad ; \quad BC = k \times B'C' \quad ; \quad CD = k \times C'D'$$
$$DE = k \times D'E' \quad ; \quad EA = k \times E'A'$$

Es decir, cada lado es **k** veces el lado homólogo del segundo. Por eso al cociente constante **k** se le llama también **factor de proporcionalidad.**



106. Razón de los perímetros de dos polígonos semejantes

Sean dos polígonos ABCDE y A'B'C'D'E' que son semejantes. Por tanto sus lados son proporcionales, o sea

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'}$$

Pero por una propiedad de la serie de razones iguales, se tiene

$$\frac{a+b+c+d+e}{a'+b'+c'+d'+e'} = \frac{a}{a'}$$

y llamando P y P' a los perímetros resulta

$$\frac{P}{P'} = \frac{a}{a'}$$

La razón de los perímetros de dos polígonos semejantes, es igual a la razón de dos lados homólogos.

EJEMPLOS:

1.º *La razón de semejanza de dos polígonos es 2/7 y el perímetro del primero es 38 dm. ¿Cuánto medirá el perímetro del segundo?*

Puesto que la razón de los perímetros es igual a la razón de semejanza, tendremos:

$$\frac{38 \text{ dm.}}{x} = \frac{2}{7} \quad ; \quad x = \frac{38 \text{ dm.} \times 7}{2} = 133 \text{ dm.}$$

2.º *Se ha hecho un plano de una finca a escala de 1/750. ¿Qué longitud tendrá una tapia que en el dibujo mide 25 cm?*

La escala no es otra cosa que la razón de semejanza. Luego:

$$\frac{25 \text{ cm.}}{x} = \frac{1}{750} \quad ; \quad x = 750 \times 25 \text{ cm.} = 18750 \text{ cm.} = 187{,}50 \text{ m.}$$

107. Escalas

Frecuentemente hay que representar, por medio del dibujo, objetos que no caben en el papel, por tener dimensiones muy grandes, o que no pueden apreciarse bien, por tener dimensiones muy pequeñas. Como consecuencia habrá que reducir o ampliar todas sus dimensiones en una proporción determinada, y este factor de proporcionalidad o de semejanza es lo que se llama **escala** del dibujo.

Escala es la razón constante que existe entre la dimensión de una línea cualquiera del dibujo y su correspondiente del original.

Las escalas pueden ser **numéricas** o **gráficas.**

108. Escala numérica

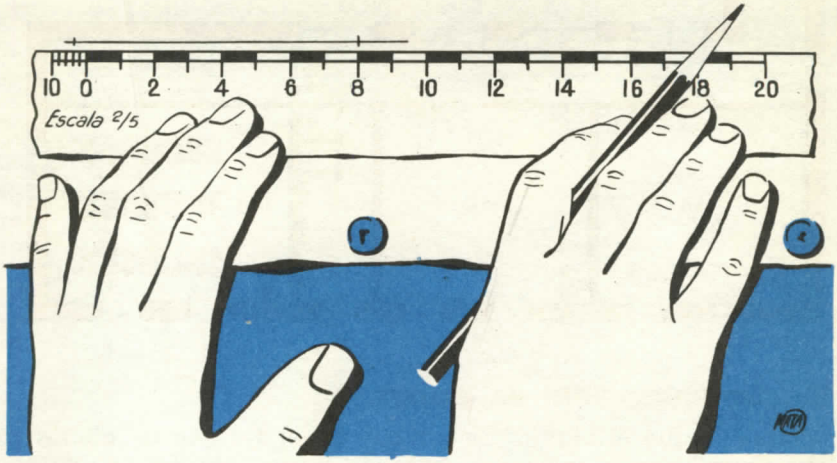
Suele representarse por una fracción ordinaria. Una dimensión cualquiera del dibujo se obtiene multiplicando la correspondiente del original por la escala. Sea la escala 2/5, y una dimensión del original 8 cm. La correspondiente en el dibujo valdrá:

$$8 \text{ cm.} \times \frac{2}{5} = \frac{8 \text{ cm.} \times 2}{5} = \frac{16 \text{ cm.}}{5} = 3{,}2 \text{ cm.}$$

Procedimiento lento y pesado, cuando hay que reducir así todas las medidas.

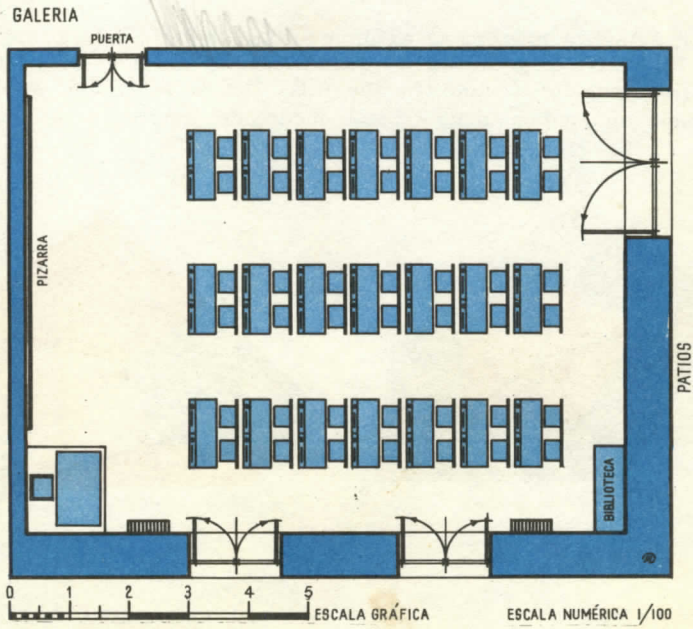
109. Escala gráfica

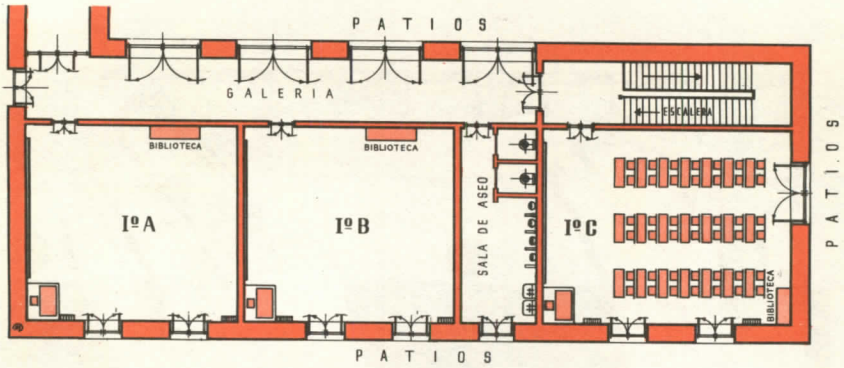
Simplifica mucho los cálculos anteriores. Si queremos, por ejemplo, representar gráficamente la escala 2/5, sabemos que 2 cm. del dibujo equivalen a 5 cm. del original. En el borde de una cartulina tomaremos una longitud de 2 cm. y la dividiremos en 5 partes iguales. Cada una de estas divisiones, numeradas correlativamente de



1 a 5, representará 1 cm. del original. Proseguimos estas divisiones hacia la derecha hasta la 20, por ejemplo. Hacia izquierda del 0 tomamos una de estas divisiones y la dividimos en 10 partes iguales. Cada una de éstas representa mm. Esta última división se denomina **contraescala.**

Empleo: Si se quiere representar en el dibujo una dimensión de 84 mm. del original, colocaremos una de las puntas del compás en la división 8 de la escala, y la otra en la 4 de la contraescala. Esta longitud se puede llevar incluso con el mismo borde de la cartulina, sin tener que hacer uso del compás.





110. Levantamiento de planos

Conviene que el alumno se ejercite en el trazado de planos sencillos, como el de su cuarto, su casa, su jardín, etc. La figura representa el de una clase a la escala 1/100; esto es, 1 cm. del dibujo representa 1 metro de la realidad. La escala se indica en la parte inferior de la figura. Lo mismo se hace con los mapas.

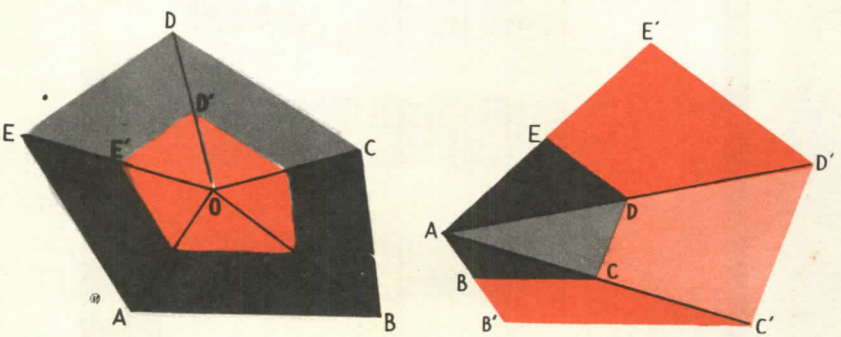
Sirviéndose de esta escala, en que cada división representa 1 m., diga el alumno las dimensiones de la clase, de los pupitres, el grosor de los muros, la anchura de las ventanas, etc.

La figura representa igualmente la planta o piso en que se encuentra la clase a la escala 1/250. Háganse en ella ejercicios análogos a los anteriores.

EJERCICIOS

1. En la figura primera O es un punto cualquiera interior al polígono A B C D E; A', B', C' y D' son los puntos medios de O A, O B, O C, O D y O E, respectivamente. Demuestra que A B C D E es semejante a A'B'C'D'E'.

2. Dado un pentágono de tamaño moderado, ampliarlo en la razón de



$\frac{2}{1}$, valiéndote de una construcción análoga a la del ejercicio anterior.

3. En la figura segunda, los segmentos A B', A C', A D', A E' son doble de los segmentos A B, A C, A D, A E, respectivamente. Demuestra que el polígono A B C D E es semejante al A'B'C'D'E'.

4. Dado un pentágono de tamaño conveniente, redúcelo en la razón de $\frac{1}{2}$, valiéndote de una construcción análoga a la del ejercicio 3.

5. Los lados de un pentágono miden 3, 7, 8, 6 y 15 cm. El lado mayor de un polígono semejante mide 20 cm. Halla su perímetro.

6. Los lados de un pentágono miden 3, 4, 5, 6 y 7 cm. Halla los lados de un pentágono semejante si su perímetro es 45 cm.

7. Los lados de un polígono miden 7, 10, 12 y 13 cm. Halla el perímetro de un polígono semejante cuyo lado más corto mide 9 cm.

8. Los lados de un cuadrilátero miden 9, 10, 12 y 15 cm. El perímetro de un cuadrilátero semejante es de $61\frac{1}{3}$ cm. Halla sus lados.

9. Los lados de un polígono miden: $a = 6$ cm., $b = 9$ cm., $c = 10$ cm., $d = 12$ cm. y $e = 13$ cm. Halla los lados de otro polígono semejante en el que $a' = 15$ cm.

10. La razón de semejanza de dos polígonos semejantes es $\frac{3}{7}$ y el perímetro del primero es 93 mm. Halla el del segundo.

11. La base de un campo rectangular mide 63 m. y la altura 33 m. Hallar la altura de otro campo semejante que tiene 42 m. de base.

12. El perímetro de un pentágono es 120 dm., y sus lados son entre sí como los números 3, 5, 6, 7 y 9. ¿Cuánto miden dichos lados?

13. Los lados de un pentágono miden 8, 12, 20, 16 y 24 cm. Calcula los de otro pentágono semejante cuyo perímetro mide 1 m.

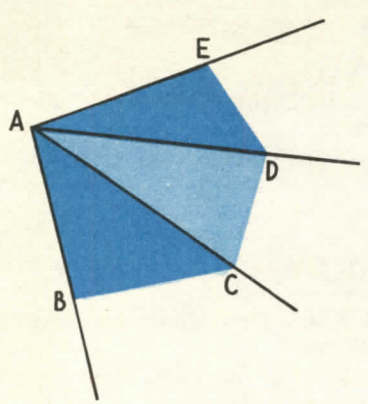
14. Un polígono tiene un lado de 7 dm. Hallar la longitud del lado homólogo en un polígono semejante cuyo perímetro es 6 veces el del primero.

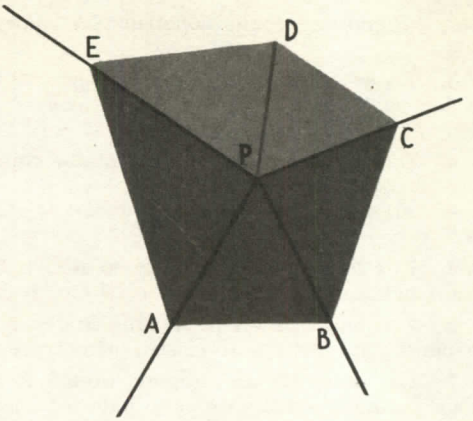
15. Construye un polígono semejante al de la figura primera, cuya razón de semejanza sea $\frac{3}{2}$, valiéndote de paralelas.

Indicación: Emplea las diagonales y las prolongaciones de los lados A E y A B.

16. Construye un polígono semejante al de la figura segunda, valiéndote de paralelas y del centro de semejanza, y cuya razón de semejanza sea $\frac{5}{4}$.

Indicación: Emplea las rectas P A, P B, P C ...





17. Un rectángulo tiene por dimensiones 4 dm. y 6 dm. ¿Cuáles son los lados de un rectángulo semejante si la razón de semejanza es $\frac{3}{4}$?

18. ¿Cuál será en el plano de un terreno dibujado a escala de $\frac{1}{300}$ la distancia de dos puntos que en el natural se hallan a 93 m. uno de otro?

19. Si un campo está dibujado a escala de $\frac{1}{1200}$, ¿cuál será en el terreno la distancia que en el dibujo mide 18 cm.?

20. ¿A qué escala está dibujado un campo, si en el plano un segmento de 12 cm. representa 60 m. de terreno?

21. Las bases de un campo de forma de trapecio rectangular miden: B = 240 m. y b = 180 m., y su altura es h = 144 m. ¿Qué longitudes tienen estos lados en un dibujo del campo hecho a escala de $\frac{1}{400}$?

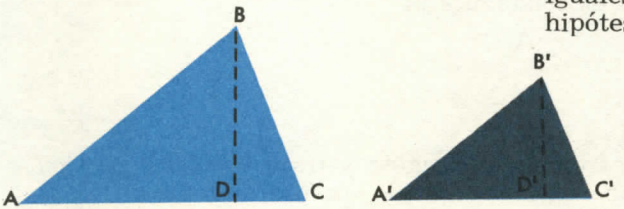
22. Los lados de un polígono miden 4, 6, 8, 10 y 12 m. Halla los lados de un polígono semejante si la razón de semejanza es: 1.º $\frac{1}{2}$; 2.º $\frac{2}{3}$; 3.º $\frac{3}{5}$.

19

Razón de las áreas y construcción de polígonos semejantes

111. Razón de las alturas de dos triángulos semejantes

Sean A B C y A' B' C' los triángulos semejantes, y B D y B' D' dos alturas homólogas, esto es, salidas de dos vértices de ángulos iguales como el B y B'. Por hipótesis se tiene



$$\widehat{C} = \widehat{C}'$$

$$\frac{B\,C}{B'\,C'} = \frac{A\,C}{A'\,C'}$$

Los triángulos B C D y B'C'D' son semejantes por tener dos ángulos iguales: $\widehat{C} = \widehat{C}'$, por hipótesis, y $\widehat{D} = \widehat{D}'$, por ser rectos. Luego

$$\frac{B\,C}{B'\,C'} = \frac{B\,D}{B'\,D'} \qquad (2)$$

De las igualdades (1) y (2) deducimos:

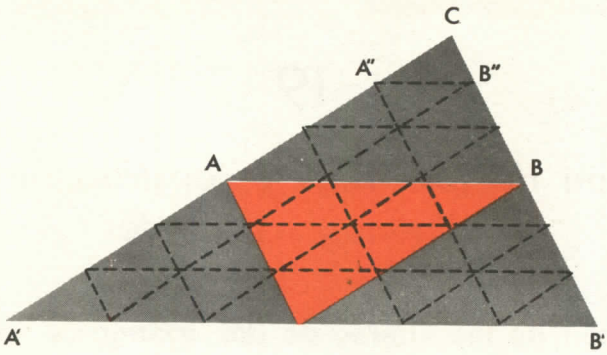
$$\frac{B\,D}{B'\,D'} = \frac{A\,C}{A'\,C'}$$

Las alturas homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales a las bases respectivas.

Este teorema no es sólo cierto para las alturas, sino también para todos los demás segmentos homólogos, como bisectrices, medianas, etcétera.

112. Razón de las áreas de dos triángulos semejantes

Recorta en cartulina cuatro triángulos iguales al A B C. Colócalos como indica la figura. Se forma otro triángulo, el A' B' C, semejante al A B C. La razón de semejanza es



$$\frac{A'C}{AC} = 2$$

y la razón de sus áreas es $4 = 2^2$.

Divide ahora A C en tres partes iguales, y traza paralelas por los puntos de división como indica la figura. Los dos triángulos A B C y A'' B'' C son semejantes. La razón de semejanza es 3, y la razón de las áreas es $9 = 3^2$.

Si comparamos los triángulos A' B' C y A'' B'' C, encontramos del mismo modo que la razón de semejanza es 6, y la razón de sus áreas es $36 = 6^2$, ya que A' B' C se descompone en 36 triángulos iguales al A'' B'' C.

O sea:

La razón de las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

Se demuestra fácilmente que este teorema es general, válido para cualquier triángulo.

En efecto, sean dos triágulos semejantes, en que dos lados homólogos miden **b** y **b'**, y sus alturas respectivas, **a** y **a'**. Se tiene para sus áreas

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a \quad ; \quad S' = \frac{1}{2} \cdot b' \cdot a'$$

Dividiendo ordenadamente, y simplificando el factor común 1/2, queda

$$\frac{S}{S'} = \frac{b \cdot a}{b' \cdot a'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{a}{a'}$$

Pero según el número 111, y llamando K la razón de semejanza de los dos triángulos, es

$$\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} = K$$

Luego

$$\frac{S}{S'} = K \cdot K = K^2$$

113. Razón de las áreas de dos polígonos semejantes

En todas las fórmulas de áreas que obtuvimos los Cursos anteriores aparecía siempre un producto de dos longitudes. Al comparar, pues, las áreas de dos polígonos semejantes, como cada una de estas longitudes vendrá multiplicada por la razón de semejanza, resulta que el área quedará multiplicada por el **cuadrado** de dicho número.

La razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

EJEMPLOS:

1.º *Hallar la razón de las áreas de dos triángulos semejantes si la razón de sus perímetros es* $\frac{2}{5}$.

Como la razón de los perímetros es igual a la razón de semejanza, aplicando el teorema del número 111:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}.$$

2.º *La razón de las áreas de dos polígonos semejantes es* $\frac{9}{25}$ *y un*

lado del primero mide 33 dm. ¿Cuánto medirá su lado homólogo en el segundo?

Llamaremos **x** al lado desconocido.

Si aplicamos el teorema: $\frac{9}{25} = \frac{33^2}{x^2}$

y extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros:

$$\frac{3}{5} = \frac{33 \text{ dm.}}{x}$$

de donde:

$$x = \frac{33 \text{ dm.} \cdot 5}{3} = \mathbf{55 \text{ dm.}}$$

3.º *Las bases de un trapecio miden 21 y 35 mm., y el triángulo formado por la prolongación de los lados no paralelos y la base menor, tiene de área 270 mm². Hallar el área del trapecio.*

Llamamos **x** dicha área. La del triángulo formado por los lados no paralelos y la base mayor del trapecio será entonces $270 + \mathbf{x}$. Siendo los dos triángulos semejantes (teorema de Tales), se tendrá

$$\frac{270 + x}{270} = \left(\frac{35}{21}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9},$$

o sea, según una propiedad de las proporciones:

$$\frac{x}{270 \text{ mm}^2.} = \frac{25 - 9}{9},$$

de donde:

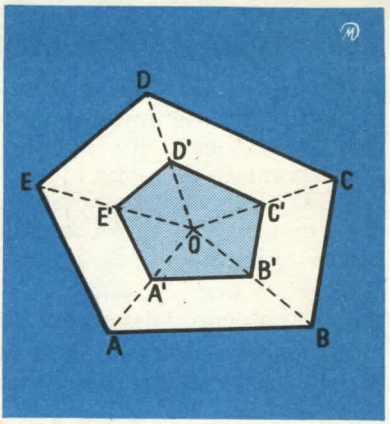
$$x = \frac{270 \text{ mm}^2 \cdot 16}{9} = \mathbf{480 \text{ mm}^2.}$$

114. Construcción de polígonos semejantes

EJEMPLOS:

1.º *Construir un polígono semejante al ABCDE de la figura, siendo la razón de semejanza 1/2.*

Tomemos un punto O cualquiera interior al polígono dado, y unámoslo con los vértices del mismo. Tomemos ahora los puntos medios A', B', C', D' y E' de los segmentos OA, OB, OC, OD y OE. El polígono A'B'C'D'E' resuelve el problema. En efecto, el triángulo OAB es semejante al O'A'B', por tener dos lados proporcionales

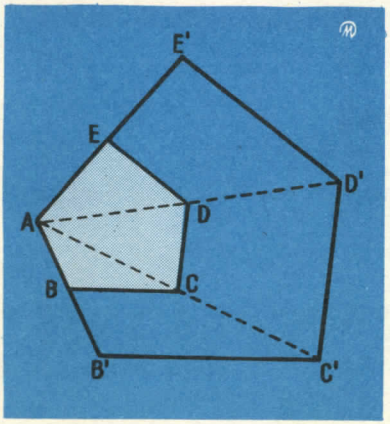


$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{1}{2}$$

y común el ángulo comprendido. Además, según el número 97, A'B' será paralelo a AB. Lo mismo ocurre con los demás lados análogos. Luego, los ángulos del polígono A'B'C'D'E' son iguales a los correspondientes del ABCDE, por tener sus lados paralelos. Además,

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{OC'}{OC} = \frac{C'D'}{CD} =$$

$$= \frac{OD'}{OD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{OE'}{OE} = \frac{E'A'}{EA} = \frac{1}{2},$$



o sea, los lados de A'B'C'D'E' son proporcionales a los de ABCDE, siendo la razón de semejanza 1/2. Luego el polígono A'B'C'D'E' es semejante al dado.

2.º Construir un polígono semejante al ABCDE de la figura, siendo 2 la razón de semejanza con respecto al primero.

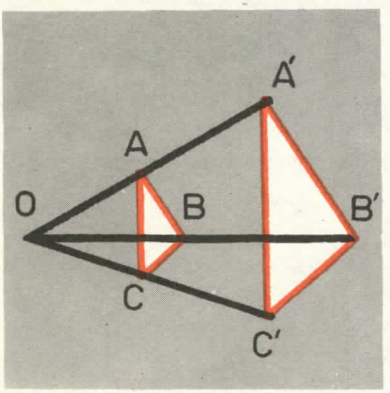
Prolongamos los segmentos AB, AC, AD y AE unas longitudes AB' = 2 AB, AC' = 2 AC, AD' = = 2 AD y AE' = 2 AE. El polígono AB'C'D'E' es semejante al dado. La demostración es análoga a la anterior.

115. Triángulos homotéticos

La transformación que hace corresponder al polígono ABCDE de la figura 1.ª del número anterior el polígono A'B'C'D'E', se llama **homotecia,** y es O el **centro de homotecia.** La transformación que hace corresponder al polígono ABCDE de la figura 2.ª, el polígono AB'C'D'E', es otra homotecia de centro de homotecia el punto A. En el primer caso la **razón de homotecia** es 1/2; en el segundo caso dicha razón de homotecia es 2.

Se dice que el polígono A'B'C'D'E' es **homotético,** u homólogo en una homotecia, del polígono ABCDE.

En general, **homotecia es la transformación que hace corresponder a todo punto A del plano otro punto A', alineado con A y con un centro de homotecia O dado, y tal que**



$$\frac{OA'}{OA} = k$$

siendo k la razón de homotecia.

Sea del mismo modo B' el homotético de B y C' el homotético de C. Los dos triángulos homotéticos ABC y A'B'C' tienen sus lados paralelos, según se demostró en el número anterior, y son semejantes, siendo **k** la razón de semejanza.

Dos triángulos homotéticos tienen sus lados paralelos y son semejantes.

EJERCICIOS

1. Dado un polígono, construye otro semejante cuya razón de semejanza sea $\frac{3}{2}$.

2. Dado un polígono, construye otro semejante cuya razón de semejanza sea $\frac{5}{3}$.

3. La base de un campo rectangular es 81 m. y la altura 48 m. Halla la altura de otro campo semejante que tiene 54 m. de base.

4. Si un campo está dibujado a escala $\frac{1}{750}$, ¿cuál será en el terreno la distancia entre dos puntos que en el dibujo mide 23 cm.?

5. ¿Cuál será, en el plano de un terreno dibujado a escala de 1/500, la distancia entre dos puntos que en el natural se hallan a 105 m. uno de otro?

6. Un poste vertical de 2 m. proyecta una sombra de 1,5 m. ¿Qué altura tiene un árbol que a la misma hora proyectaba una sombra de 3,5 m.?

7. El perímetro de un triángulo es 27 cm., y los lados de un triángulo semejante miden 2, 3 y 4 cm. Halla las longitudes de los lados del primer triángulo.

8. Los lados de un pentágono miden 2, 3, 5, 6 y 8 cm. Halla los lados de un pentágono semejante cuyo perímetro mide $9\frac{3}{5}$ dm.

9. Si un campo está dibujado a escala de $\frac{1}{500}$, ¿cuál será en el terreno la distancia que en el dibujo mide 3,4 cm.?

10. El mapa de una región tiene 8,47 dm^2 de área. Si el mapa está dibujado a escala 1 : 50.000, ¿cuál es la verdadera extensión de dicha región?

11. ¿Qué diferencia existe entre polígonos semejantes y polígonos equivalentes? Razona la respuesta y pon algún ejemplo, valiéndote del dibujo.

12. Los tres lados de un triángulo miden 8, 10 y 12 cm. Halla el perímetro de otro triángulo semejante y cuya área valga 1.024 veces la del propuesto.

13. Las áreas de dos polígonos semejantes están en la relación 0,01. ¿Cuál es la razón de sus perímetros, expresada en forma de fracción ordinaria?

14. Las áreas de dos polígonos semejantes son 144 m^2 y 441 m^2. Sabiendo que el perímetro del primero es 48 m., ¿cuál es la del segundo?

15. Los lados de un triángulo se triplican. ¿Qué le sucede a su área? ¿Por qué?

20

Ecuación de primer grado

116. Un ejemplo

Queremos hallar el peso de un libro, y la pesa menor de que disponemos es de 20 gramos. Después de varios tanteos logramos equilibrar la balanza poniendo en un platillo 3 libros iguales y 20 gramos, y en el otro platillo tres pesas de 500, 200 y 100 gramos, respectivamente. ¿Cuál es el peso del libro?

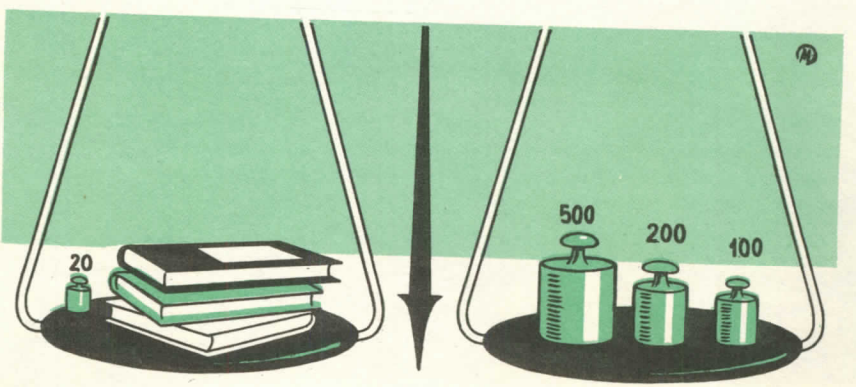
Designemos por **x** el peso de un libro; el de los 3 libros será 3 x, y se habrá de verificar

$$3x + 20 = 800 \qquad (1)$$

Esta igualdad no se verifica para un valor cualquiera de la letra **x**, como hemos visto sucede en las identidades, sino que ha de cumplirse sólo para un cierto valor de **x**, que coincide con el peso del libro. Tales igualdades se denominan **ecuaciones.**

Es fácil ver en nuestro ejemplo que haciendo la trasposición del término 20, resulta

$$3x = 800 - 20 = 780$$



y dividiendo por 3 los dos miembros:

$$x = \frac{780}{3} = 260 \text{ gramos.}$$

El libro pesa **260 gramos.**

Este valor se denomina **raíz** de la ecuación, y ha de ser tal que sustituido en dicha ecuación en el lugar de la letra, la convierta en una identidad. Así, en nuestro ejemplo:

$$3 \times 260 + 20 = 800$$

o sea,

$$780 + 20 = 800$$

117. Ecuación de primer grado con una incógnita

EJEMPLOS:

1.º Sea la ecuación:

$$4\,(x - 3) - 5\,(x + 2) = 7\,(3x - 1) + 29$$

Quitando paréntesis en cada uno de los dos miembros se obtiene:

$$4x - 12 - 5x - 10 = 21x - 7 + 29;$$

o sea,

$$-x - 22 = 21x + 22.$$

Trasponiendo los términos que contienen **x** al primer miembro, y los términos independientes de **x** al segundo,

$$-x - 21x = 22 + 22;$$

o sea,

$$-22x = 44.$$

Dividiendo los dos miembros por -22:

$$x = \frac{44}{-22} = -2.$$

La ecuación propuesta tiene la raíz $\mathbf{x = -2}$.

Comprobación:

$$4\,(-2 - 3) - 5\,(-2 + 2) = 7\,(-6 - 1) + 29,$$

ó

$$-20 = -20.$$

2.º Sea la ecuación:

$$\frac{4x - 6}{5} = \frac{x}{3} - \frac{4}{15}.$$

Multipliquemos los dos miembros por 15, m. c. m. de los denominadores:

$$3\,(4\,x - 6) = 5\,x - 4;$$

o sea,

$$12\,x - 18 = 5\,x - 4,$$

es decir:

$$12\,x - 5\,x = 18 - 4;$$

de donde,

$$7\,x = 14;$$

dividiendo por 7:

$$x = \frac{14}{7} = 2.$$

Comprobación:

$$\frac{8-6}{5} = \frac{2}{3} - \frac{4}{15};$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

Por los ejemplos expuestos se ve que el método que hay que seguir es el siguiente:

118. Regla para resolver la ecuación de primer grado

1.ª **Suprimir los denominadores** (si hay lugar) multiplicando cada término por un múltiplo común de los denominadores.

2.ª **Reducir los dos miembros** de la ecuación obtenida.

3.ª **Trasponer a un miembro los términos que contiene la incógnita y al otro los términos que no la contienen.**

4.ª Para obtener la raíz, **se divide el término conocido por el coeficiente de la incógnita.**

119. Observaciones

1.ª Cuando se multiplican los dos miembros de una ecuación por una expresión que contiene la incógnita, la ecuación obtenida puede admitir raíces que no verifican a la ecuación primitiva.

EJEMPLO:

Sea la ecuación:

$$x - 5 = 12, \qquad (1)$$

que sólo tiene la raíz

$$x = 17.$$

Multipliquemos los dos miembros por $x - 3$:

$$(x - 3)\ (x - 5) = (x - 3) \times 12. \qquad (2)$$

La ecuación (2) tiene la raíz $x = 3$ que no tiene la (1).

2.ª Cuando se dividen los dos miembros de una ecuación por una expresión que contiene la incógnita, la ecuación primitiva puede admitir raíces que no verifican la nueva ecuación obtenida.

EJEMPLO:

Sea la ecuación:

$$4x^2 - 3x = 5x. \qquad (3)$$

Dividamos los dos miembros por x:

$$4x - 3 = 5 \qquad (4)$$

La ecuación (3) tiene la raíz $x = 0$, que no tiene la ecuación (4).

120. Discusión de la ecuación de primer grado con una incógnita

Toda ecuación completa de primer grado con una incógnita, después de preparada, toma la forma general

$$ax + b = 0. \qquad (5)$$

Para resolverla se pasa el término conocido al segundo miembro y después se divide por el coeficiente de la incógnita, resultando **la fórmula de la raíz.**

$$x = -\frac{b}{a} \qquad (6)$$

que es igual al término independiente cambiado de signo, dividido por el coeficiente de la incógnita.

Discusión de la ecuación de primer grado es hacer un estudio detallado de la misma, viendo los valores que toma la raíz, según los valores de los coeficientes **a** y **b.** Pueden darse los siguientes casos:

1.º Si **a** y **b** son números no nulos y de signo contrario, la fórmula [6] nos da una raíz **positiva.**

2.º Si **a** y **b** son números de mismo signo, la fórmula [6] nos da una raíz **negativa.**

3.º Si $a = 0$, $b \neq 0$, la fórmula [6] da $x = -\frac{b}{0}$; pero la división por cero es imposible, pues la ecuación se reduce a $0 \times x = -b$, y no hay ningún número **x** que, multiplicado por cero dé un número $-b \neq 0$. Por tanto en este caso la ecuación es **absurda** o **imposible.**

4.º Si $a = 0$ y $b = 0$, la ecuación se convierte en:

$$0 \times x = 0.$$

Cualquier número **x** verifica entonces la ecuación, la cual, por tanto, es **indeterminada,** ya que tiene infinitas soluciones. En este caso la ecuación se reduce a la identidad $0 = 0$.

Ejemplo de ecuación imposible.—Sea la ecuación:

$$5x - 6 = 4(x - 1) + x:$$

de donde

$$5x - 6 = 4x - 4 + x;$$

o sea,

$$5x - 5x = 6 - 4$$

que da

$$0x = 2,$$

que es una **imposibilidad.**

Ejemplo de ecuación indeterminada.—Sea la ecuación:

$$(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 12x;$$

o sea,

$$(x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) = 12x,$$

de donde

$$12x = 12x,$$

ó

$$12x - 12x = 0;$$

o sea,

$$0x = 0,$$

que es una **indeterminación.**

EJERCICIOS

Resuelve las ecuaciones siguientes:

1. $\dfrac{15x}{2} - \dfrac{x}{4} = \dfrac{5}{2}.$

2. $5x - \dfrac{3 - 2x}{2} = 2x + \dfrac{5}{2}.$

3. $5x - 13 = \dfrac{2x - 5}{4} + \dfrac{x + 4}{4}.$

4. $15x - \dfrac{6x + 1}{2} - \dfrac{x - 1}{3} = -6.$

5. $2x - \dfrac{6x^2 - 2x + 1}{6} + \dfrac{2x^2 - 3x}{2} = -1.$

6. $\dfrac{\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{2}}{5} - \dfrac{x - \dfrac{x}{3}}{2} = -\dfrac{3}{2}.$

7. $\dfrac{5}{2}x + 3 - \dfrac{7x}{4} = x + \dfrac{9}{4}.$

8. $x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{6} = 16 - \dfrac{2x}{9} + \dfrac{1}{3}.$

9. $\dfrac{2x}{3} + 4 - \dfrac{2x}{5} = \dfrac{x}{2} \dfrac{x}{3} + 3{,}5.$

10. $\dfrac{3x}{7} - \dfrac{2x}{21} + 3 = \dfrac{-x}{3} + \dfrac{13}{3}.$

José Echegaray (1833-1916).—Matemático, economista, poeta dramático y político español, nacido en Madrid. Escribió multitud de trabajos de vulgarización científica. Como matemático, se le considera como uno de los primeros de España, gozando de gran fama como calculista. Su teoría de derivadas es de las más completas que se conocen, así como sus problemas de Geometría analítica de dos y tres dimensiones.

Fue ingeniero de Caminos y obtuvo el premio Nobel.

¿Cuál es el grado de las ecuaciones siguientes:

11. $(3x - 1)^2 = (5x + 2)^2$.

12. $3x(x + 4) - (x - 5)^2 = 0$.

13. $(3x - 2)^2 - (2x + 1)^2 - 5(x + 9)(x - 4) = 5$.

14. $(x + 1)^3 + 2(x - 1)^3 + x^3 - 3x(x + 1)(x - 1) = 0$.

Resuelve las ecuaciones siguientes y luego comprueba:

15. $x + 2(x - 3) = 9$.

16. $2x - 27 = 3(2 - 3x)$.

17. $34 - 3x = 8(7 - x) + 23$.

18. $8 = 3x - 8(3 - 2x) - 63$.

19. $6(x - 10) + 3(2x - 7) = -45$.

20. $4(2 - 3x) = 8(6 + 2x) + 72$.

21. $7(4x + 3) - 4(x - 1) = 15(x + 0{,}75) + 7$.

22. $18x + 14(x - 1) = -1 - 15(3x + 1)$.

23. $\dfrac{7 - 3x}{12} + \dfrac{3}{4} = 2(x - 2) + \dfrac{3(5 - 2x)}{6}$.

24. $\dfrac{x}{5} - \dfrac{3x - 1}{6} + \dfrac{3 - x}{4} = 2$.

25. $\dfrac{3x + 3}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5x + 9}{3} - \dfrac{7x - 9}{4}$.

26. $\dfrac{2x - 7}{5} + \dfrac{x + 11}{2} = -4$.

27. $\dfrac{2x - 3}{3} - \dfrac{x - 3}{6} = \dfrac{4x + 3}{3} - 17$.

28. $\dfrac{2x - 1}{3} - \dfrac{5x + 2}{7} = x + 13$.

29. $\dfrac{5x + 7}{4} - \dfrac{3x + 5}{8} = \dfrac{4x + 9}{5} - \dfrac{x - 9}{3}$.

21

Problemas de primer grado con una incógnita

121. Problema 1.°

¿Qué número sumado con 15 da 29?

Esta pregunta puede expresarse por la ecuación

$$x + 15 = 29,$$

llamando **x** al número pedido.

Restando 15 en ambos miembros resulta

$$x = 29 - 15$$
$$\mathbf{x = 14.}$$

122. Problema 2.°

La suma de dos números impares consecutivos es 32. Hallarlos.

Solución:

Número menor x
Número mayor ... ... $x + 2$.

Ecuación:

$$x + x + 2 = 32$$
$$2x + 2 = 32$$
$$2x = 30$$
$$\mathbf{x = 15}$$

y el mayor valdrá:

$$15 + 2 = \mathbf{17}$$

123. Problema 3.°

Juan tiene 28 años menos que su padre. Dentro de 15 años la edad de éste será doble que la de Juan. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

Solución: Sea x la edad actual de Juan.

Edad actual de Juan	x
Edad actual de su padre	$x + 28$
Edad de Juan dentro de 15 años	$x + 15$
Edad de su padre dentro de 15 años	$x + 28 + 15$.

Ecuación:

$$x + 28 + 15 = 2\,(x + 15)$$

de donde

$$x + 43 = 2x + 30,$$
$$-x = -13,$$
$$x = 13.$$

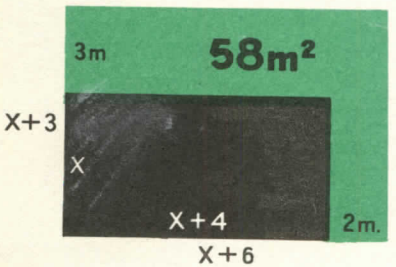
Edad de Juan: **13 años;** edad de su padre: **41 años.**

124. Problema 4.°

La longitud de la base de un rectángulo es 4 metros mayor que la longitud de su altura. Si la longitud de la base aumenta en 2 m. y la altura en 3 m., el área aumenta en 58 m². Hallar las dimensiones del rectángulo.

Solución: Sea x la altura: luego la base es $x + 4$.

Área del rectángulo primitivo	$x\,(x + 4)$.
Dimensiones del rectángulo aumentado ...	$x + 3, x + 6$.
Área del rectángulo aumentado	$(x + 3)\,(x + 6)$.



Ecuación:

$$(x + 3)\,(x + 6) = x\,(x + 4) + 58;$$

de donde,

$$x^2 + 9x + 18 = x^2 + 4x + 58,$$
$$5x = 40,$$
$$x = 8,$$

Longitud de la altura: **8 m.;** longitud de la base: **12 m.**
Comprueba por sustitución.

125. Problema 5.°

En una fracción el denominador tiene 5 unidades más que el numerador. Si se suman 35 unidades al numerador, el valor de la fracción será igual a la inversa de la fracción primitiva. ¿Cuál es ésta?

Solución: Sea x el numerador de la fracción. Luego el denominador es $x + 5$ y la fracción $\frac{x}{x+5}$.

Ecuación:

$$\frac{x+35}{x+5} = \frac{x+5}{x};$$

de donde,

$$x^2 + 35x = x^2 + 10x + 25,$$
$$25x = 25,$$
$$x = 1.$$

La fracción pedida es $\frac{1}{6}$.

Comprobar esta raíz sustituyendo el valor de **x** en el problema (no sólo en la ecuación).

126. Problema 6.°

En un corral hay gallinas y conejos, contándose en total 41 cabezas y 118 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Solución:

Número de gallinas	x
Número de conejos	41 — x
Número de patas de gallina	2 x
Número de patas de conejo	4 (41 — x)

Ecuación:

$$2x + 4(41 - x) = 118.$$

Quitando paréntesis:

$$2x + 164 - 4x = 118.$$

Trasponiendo términos:

$$164 - 118 = 4x - 2x,$$

o sea,

$$46 = 2x,$$

de donde:

$$x = \frac{46}{2} = \mathbf{23\ gallinas.}$$

Por tanto, el número de conejos es:

$$41 - 23 = \textbf{18 conejos.}$$

127. Interpretación de una solución negativa

Una madre tiene 31 años. Un hijo suyo 7 años. ¿Al cabo de cuántos años la edad de la madre será el quíntuplo de la edad del hijo?

Solución: Sea **x** el número de años pedido; la edad de la madre se convertirá en $31 + x$, la del hijo en $7 + x$.

Ecuación:

$$31 + x = 5\ (7 + x);$$

de donde

$$31 + x = 35 + 5x$$

o sea,

$$-4x = 4$$
$$x = -1.$$

El problema es imposible. Pero se puede interpretar la respuesta del modo siguiente: Añadir (-1) año a la edad de la madre y a la del hijo, es restarles 1 año. La respuesta satisface el problema si se conviene modificarla así: ¿Cuántos años hace que la edad de la madre era el quíntuplo de la edad del hijo?

128. Indicaciones generales para la resolución de problemas

De los ejemplos precedentes resulta que la solución algebraica de un problema requiere:

1.º **La elección de la incógnita.** Esta elección debe hacerse de modo que se conozca la solución del problema desde que la incógnita esté determinada.

2.º **Traducir el problema en ecuación** (planteo del problema). Consiste en traducir el enunciado por una igualdad en que entren los datos y la incógnita. Para ello, con la incógnita se escriben todas las operaciones (indicadas solamente) que habría que hacer si fuera conocida para comprobarla.

3.º **La resolución de la ecuación obtenida.** Es la parte puramente algebraica del problema.

4.º **Discusión del resultado.** Se examina si el resultado satisface a las condiciones impuestas por el problema. Así en el problema del número 127 hemos visto que el resultado no satisface a la pregunta que en aquél se hace, y, por tanto, el problema es imposible. Igual sucederá, por ejemplo, si el resultado debiera ser un número entero y saliera fraccionario.

129. Problema de los móviles

El problema clásico de los móviles es el siguiente:

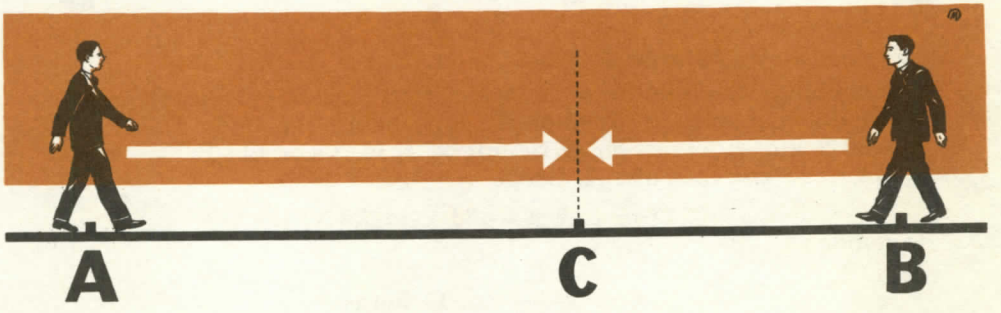
Dos móviles, A y B, se mueven sobre la misma recta, el primero con velocidad v_1, *y el segundo con velocidad* v_2. *Si en un instante dado están situados a una distancia* d *uno de otro, ¿al cabo de cuánto tiempo y en qué punto se encontrarán?*

Pueden ocurrir dos casos: 1.º, que vayan a encontrarse, esto es, que se dirijan en sentido opuesto uno de otro; 2.º, que vayan en el mismo sentido, o sea, uno detrás de otro.

1.º **Que vayan en sentido opuesto.** Entonces los dos móviles se encontrarán en un punto C intermedio entre A y B.

EJEMPLO:

Dos peatones, A y B, que distan entre sí 45 km., se dirigen a encontrarse: A con la velocidad de 5 km/h. y B con la de 4 km/h. ¿Cuándo y dónde se encontrarán?



Solución: Llamemos x al número de horas que tardan en encontrarse en C. Durante ese tiempo A habrá recorrido 5 x km., y B habrá andado 4 x km. Entre los dos han recorrido AC + CB = AB = 45 km.

Por tanto

$$45 = 5\,x + 4\,x = 9\,x,$$

de donde

$$x = \frac{45}{9} = 5 \text{ horas.}$$

La distancia recorrida por A vale

$$AC = 5 \cdot x = 5 \cdot 5 = 25 \text{ km.}$$

Se encuentran al cabo de **5 horas,** y a **25 km.** de A.

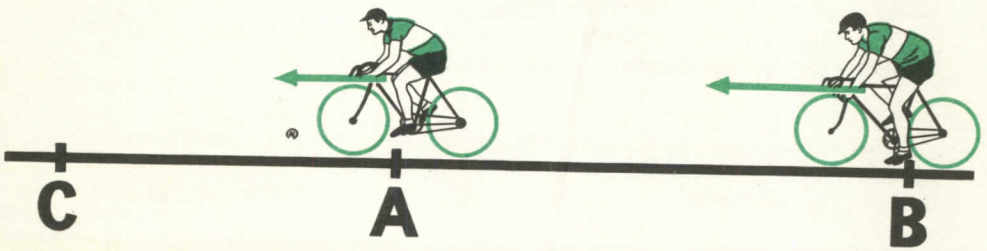
2.º **Que vayan en el mismo sentido.**

Si marcha B detrás de A, para que puedan encontrarse será nece-

sario que $v_2 > v_1$. Verificada esta condición, llamaremos C al punto en que se encuentran.

EJEMPLO:

Dos ciclistas, A y B, se dirigen al mismo punto y salen también del mismo punto; A corre con la velocidad de 30 km/h. y B con la de 37,5 km/h.; A parte $2^1/_2$ h. antes que B, y éste alcanza a A en el momento de llegar ambos al punto de cita. ¿Cuánto tiempo ha recorrido B y qué distancia?



Solución: Ventaja de A : $30 \cdot 2{,}5 = 75$ km. $=$ AB.

Llamemos x el número de horas que tardan en encontrarse, a partir del momento en que sale B. Este habrá recorrido 37,5 x km., y A 30 x km. Además, en el tiempo x, B ha recorrido BC — AC = = BA = 75 km. más que A. Luego

$$75 = 37{,}5\ x - 30\ x = 7{,}5\ x;$$

de donde

$$x = \frac{75}{7{,}5} = \mathbf{10\ horas.}$$

Distancia que recorre B:

$$BC = 10 \times 37{,}5 = \mathbf{375\ km.}$$

Fórmula general y discusión.—Consideremos las distancias como positivas, si son recorridas en el sentido de A a B, y negativas en caso contrario, e igualmente para las velocidades v_1 y v_2.

Cualquiera que sea la posición relativa de los puntos A, B y C, se verifica siempre que en valor absoluto y signo

$$AB = AC - BC.$$

Pero $AC = v_1\ t$, $BC = v_2\ t$. Luego

$$d = v_1\ t - v_2\ t = (v_1 - v_2)\ t,$$

de donde

$$t = \frac{d}{v_1 - v_2}$$

Para la **discusión** podemos considerar los siguientes casos:

1.º Que $d > o$, y $v_1 > v_2$ Entonces es $t > o$, lo que indica que el encuentro se realiza después del instante inicial considerado. Puede suceder que:

a) $v_1 > v_2 > o$; entonces A **persigue** a B hacia derecha.

b) $v_1 > o > v_2$; entonces A y B van uno al **encuentro** del otro (ejemplo 1.º).

c) $o > v_1 > v_2$; entonces B **persigue** a A hacia izquierda (ejemplo 2.º).

2.º Que $d > o$ y $v_1 = v_2$. Entonces es o $t = d$, ecuación **imposible,** según se explicó en el número 120. El encuentro no se produce, ya que yendo los móviles a la misma velocidad y en el mismo sentido, se mantienen siempre a la misma distancia.

3.º Que $d > o$ y $v_1 < v_2$. Entonces es $t < o$, lo que indica que el encuentro se produjo antes del instante inicial, en que los móviles se encontraban en A y B. Como en el caso 1.º, pueden ocurrir los tres subcasos a), b) y c).

4.º Que $d = o$, y $v_1 \neq v_2$. Entonces $t = o$, y los móviles se encontraron en el instante inicial.

5.º Que $d = o$, y $v_1 = v_2$. La ecuación se reduce a o $t = o$, que es **indeterminada** (número 120), o sea, admite cualquier valor como solución.

En efecto, partiendo juntos los dos móviles, y llevando la misma velocidad y en el mismo sentido. es claro que se mantienen constantemente en contacto.

EJERCICIOS

1. Halla tres números pares consecutivos, cuya suma sea 66.
2. ¿Qué número aumentado en 17 da 43?
3. Halla tres números impares consecutivos, tales que la suma de los dos últimos sea 92.
4. ¿Qué número multiplicado por 3, y sumando luego 7 al producto, da 19?
5. Halla tres números impares consecutivos, tales que 3 veces el primero más 4 veces el segundo, excede en 26 a 5 veces el último.
6. Halla cuatro números consecutivos, tales que 3 veces el último más 5 veces el primero, exceda en 52 al doble del primero más 4 veces el segundo.
7. Juan tiene 4 años más que su hermana, y hace 6 años él tenía doble edad que la que entonces tenía su hermana. ¿Cuántos años tiene actualmente cada uno?
8. José tiene 10 años más que su hermana, y dentro de 6 años tendrá doble edad que la que entonces tenga ésta. ¿Qué edad tiene cada uno?

9. La madre de Luis tiene triple edad que él, y dentro de 14 años sólo tendrá el doble de la que entonces tenga éste. ¿Qué edad tiene cada uno?

10. Víctor tiene 3 años más que su hermano, y dentro de 4 años la suma de sus edades será de 33 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

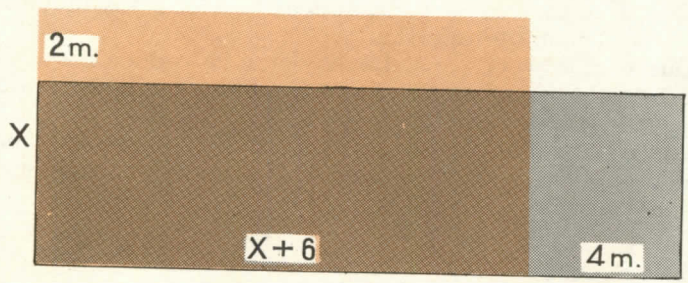
11. Un muchacho dijo a otro: "Adivina cuántas pesetas tengo, sabiendo que la tercera parte de ellas menos una es igual a la sexta parte de ellas". ¿Cuánto dinero tenía?

12. Preguntado uno por la cantidad de dinero que llevaba, contestó: "Si gastase la tercera parte más la séptima parte de lo que llevo, aún me sobraría una peseta más la mitad de lo que llevo". ¿Cuánto dinero tenía?

13. En una escuela hay cuatro clases. En la primera cursan la sexta parte de los alumnos; en la segunda, la cuarta parte; en la tercera, la quinta parte, y en la última, la tercera parte más 9 alumnos. ¿Cuántos alumnos asisten a dicha escuela?

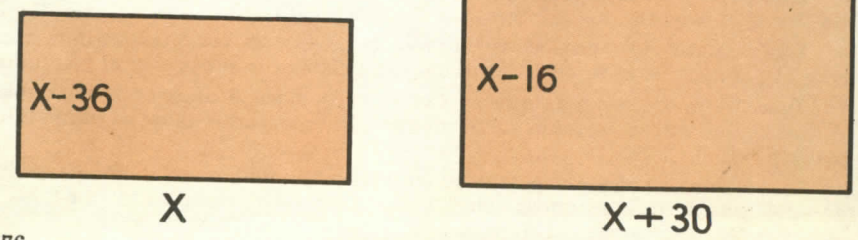
14. El camino que un empleado recorre para ir a su oficina es tal, que aumentado en sus $\frac{3}{4}$, da 7 km. ¿Cuánto mide dicho camino?

15. La base de un rectángulo es 6 m. mayor que su altura. Si la base crece en 4 m. y la altura disminuye en 2 m., el área crece en 8 m². Halla sus dimensiones.



16. La diferencia entre la base y la altura de un rectángulo es 14 m. Si la base disminuye en 8 m. y la altura aumenta en 6 m., el área disminuye en 64 m². Halla sus dimensiones.

17. La altura de un rectángulo es 36 m. menor que su base. Otro rectángulo tiene una altura de 20 m. mayor y la base 30 m. mayor que las del primero. La diferencia entre sus áreas es 4.320 m². Halla las dimensiones del primer rectángulo.



18. Halla un número cuyos cocientes por 5, 7 y 9 sumados dé 429.

19. Restando 5 a los $\frac{2}{3}$ de un número se halla el mismo resultado que añadiendo 2 a los $\frac{3}{5}$ de este número. ¿Cuál es dicho número?

20. Halla un número cuyo cuadrado aumenta en 189 cuando se aumenta en 7 dicho número.

21. En una fracción el denominador es 4 unidades mayor que el numerador. Si se añade 24 al numerador, la fracción será igual a la inversa de la fracción primitiva. ¿Cuál es la fracción?

22. El denominador de una fracción es 8 unidades mayor que el doble del numerador. Si se añade 12 al numerador, la fracción resultante excede a la fracción primitiva en $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la fracción?

23. En una fracción el denominador es 5 unidades menor que el triplo del numerador. Si se resta 2 del numerador y se añade 4 al denominador, el resultado es el mismo que si se añade 20 al denominador. ¿Cuál es la fracción?

24. Se ha repartido una cantidad de dinero entre varias personas del modo siguiente: la primera lleva 100 pesetas más $\frac{1}{4}$ del resto; la segunda, 200 pesetas más $\frac{1}{4}$ del nuevo resto, y así sucesivamente. Se halla que todas las partes son iguales. ¿Cuál es la cantidad repartida? ¿Cuál es el valor de una parte y el número de partes?

25. Un metro de paño cuesta 36 pesetas más que un metro de lienzo. Sabiendo que 10 m. de paño y 12 m. de lienzo juntos cuestan 1.284 pesetas, halla el precio del metro de cada clase.

26. Con los baldosines que tengo se puede formar un cuadrado, sobrando 25, y para formar otro mayor, de 1 baldosín más por lado, faltan 46. ¿Cuántos tengo?

27. Reparte 82 pesetas entre 4 hombres y 10 niños pobres, de modo que cada hombre reciba 3 pesetas más que cada niño.

28. ¿Qué número hay que añadir a los dos términos del quebrado $\frac{4}{7}$ para que resulte otro equivalente a $\frac{10}{11}$?

29. En un corral hay patos y conejos, siendo en total 39 cabezas y 126 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

30. Después de andar 2.400 m. me queda todavía por recorrer $\frac{1}{3}$ del trayecto que he de hacer. ¿Cuánto mide éste?

31. Han faltado a clase 8 alumnos, con lo que sólo han asistido los $\frac{5}{6}$ del número total. ¿Cuántos alumnos forman la clase?

32. Dos trenes distantes entre sí 280 km. van al encuentro uno de otro, el primero con una velocidad de 40 km. por hora, y el segundo con la de 30 km. por hora. ¿Cuándo y en qué punto se encontrarán?

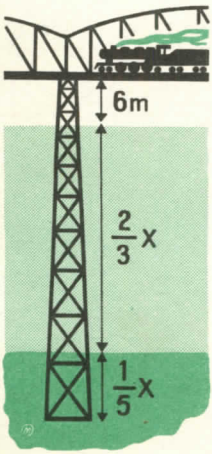
33. Un malhechor escapa a 70 km. por hora, y 90 km. más atrás le persigue la policía a 85 km. por hora. ¿Cuánto y dónde le alcanzará?

34. Un hijo dice a su padre: "Hoy tu edad es el triple de la mía, y dentro de 12 años será únicamente el doble". ¿Qué edad tiene cada uno?

35. La suma de dos números es 154 y su diferencia es 36. Hállalos.

36. Reparte 283 pesetas entre dos familias pobres, de modo que una reciba 75 pesetas más que la otra.

37. Una columna tiene $\frac{1}{5}$ de su longitud introducido en tierra, $\frac{2}{3}$ de la misma en el agua y 6 metros en el aire. ¿Cuál es la longitud de la columna?



38. En un quebrado el numerador tiene 4 unidades menos que el denominador. Si se resta 3 del numerador y se añade 2 al denominador, el valor de la fracción resultante es $\frac{2}{3}$. ¿Cuál es el valor de la fracción original?

39. De un tonel de vinagre se ha ido $\frac{1}{6}$ de su capacidad, y luego se sacan 15 litros. Después se añade $\frac{1}{4}$ de la capacidad total del tonel, con lo cual éste se llena. Cuál es la capacidad del tonel?

40. Divide el número 53 en dos partes, tales que la diferencia de los cocientes obtenidos dividiendo una parte por 3 y la otra parte por 2 sea igual a 11.

41. Un hombre se contrata por 48 días, a 90 pesetas y alimentado por cada día de trabajo. En los días que no trabaje abonará 60 pesetas por la alimentación. Al final de los 48 días recibe 3.420 pesetas. ¿Cuántos días trabajó?

42. Dos piezas de tela tienen diferentes longitudes que están en la relación $\frac{2}{3}$. Si cada pieza hubiera sido 5 metros más larga, sus longitudes estarían en la razón $\frac{4}{5}$. Cuántos metros hay en cada pieza?

43. Un rebaño de ovejas crece cada año en $\frac{1}{3}$ de su número, y al final de cada año se venden 15. Después de vender las 15 al final del segundo año quedan 221 ovejas. ¿Cuántas había al principio?

44. Si un lado de un cuadrado fuera 6 metros más corto y el otro 8 metros más largo, las longitudes de los lados del rectángulo resultante estarían en la razón $\frac{9}{16}$. Halla la longitud del lado del cuadrado.

45. Dividir 45 en dos partes, tales que la diferencia entre la parte mayor y 30 sea $\frac{1}{3}$ de la diferencia entre la menor y 25.

46. Un padre tiene 30 años más que su hijo, y dentro de 5 años la edad del padre será triple de la del hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?

47. En un corral hay conejos y gallinas; en total 23 cabezas y 80 patas. Calcula el número de animales de cada clase.

48. Un padre pone 16 problemas a su hijo con la condición de que por cada problema que resuelva recibirá 1,20 ptas. y por cada problema que no resuelva perderá 50 céntimos. Después de trabajar en los 16 problemas, el muchacho recibió 7,30 ptas. ¿Cuántos problemas resolvió?

49. La suma de dos números es 7, y su cociente exacto también 7. Calcúlalos.

50. ¿Qué número es necesario sumar a los dos términos de la fracción $\frac{3}{5}$ para obtener la fracción $\frac{5}{6}$?

51. Un ciclista parte de Madrid a las 6 horas 20 minutos y recorre 18 kilómetros por hora. Otro ciclista que desea alcanzar al primero parte a las 6 horas 45 minutos con la velocidad de 22 kilómetros por hora. ¿A qué hora y a qué distancia de Madrid el segundo alcanzará al primero?

52. Un barco que navega 60,5 km. en 5 horas 30 minutos, parte 9 horas antes que otro que navega 197,6 km. en 10 horas 24 minutos. ¿En cuánto tiempo el segundo alcanzará al primero?

53. Dos trenes parten al mismo tiempo de dos ciudades, A y B, distantes 267 km., y van el uno hacia el otro. Sus velocidades respectivas son 52 km. por hora y 37 km. por hora. ¿A qué distancia de A y en qué momento se verificará el encuentro?

54. Un peatón y un ciclista parten al mismo tiempo, las 8 horas 10 minutos, de dos puntos distantes 50 km. y van el uno hacia el otro. El primero con velocidad de 4,5 km. por hora y el segundo de 15,5 km. por hora. Se pide cuándo y dónde se encontrarán.

22

Aplicación a los problemas de repartimientos proporcionales y de mezclas

130. Reparto proporcional simple

EJEMPLO:

Tres sastres compran un lote de piezas iguales de tela que valen 57.680 pesetas. El primero se queda con 2 piezas, el segundo con 5 piezas y el tercero con 7. ¿Cuánto ha de pagar cada uno?

Solución: Es natural que cada cual pague proporcionalmente al número de piezas que adquirió. Por tanto, hay que dividir 57.680 pesetas en tres partes que sean proporcionales a 2, 5 y 7.

Sean **x, y, z** las partes buscadas. Se tiene:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$$

con

$$x + y + z = 57.680$$

Aplicando la propiedad de la serie de razones iguales (número 96):

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{x+y+z}{2+5+7} = \frac{57680}{14} = 4120$$

Luego:

$$\begin{aligned} x &= 2 \times 4120 = 8240 \text{ pesetas} \\ y &= 5 \times 4120 = 20600 \quad " \\ z &= 7 \times 4120 = 28840 \quad " \end{aligned}$$

Comprobación: Total = 57680 pesetas

Observemos que 4120 es el cociente entre el número 57.680, que hay que repartir, y la suma de los números 2, 5 y 7 a los que hay que hacer proporcionalmente el reparto.

De aquí se deduce la regla siguiente:

Para repartir una cantidad N en partes directamente proporcionales a varios números dados, basta multiplicar cada uno de estos números por el cociente que resulta de dividir N por la suma de dichos números dados.

131. Repartir un número en partes directamente proporcionales a varias fracciones

EJEMPLO:

Repartir 1620 en partes directamente proporcionales a:

$$\frac{4}{3} \; ; \; \frac{1}{6} \; ; \; \frac{3}{4}$$

Las fracciones dadas, reducidas a su mínimo denominador común, son, respectivamente, iguales a

$$\frac{16}{12} \; ; \; \frac{2}{12} \; ; \; \frac{9}{12}$$

Si designamos por **x, y, z** las partes desconocidas, debe tenerse:

$$\frac{x}{\frac{16}{12}} = \frac{y}{\frac{2}{12}} = \frac{z}{\frac{9}{12}}$$

y resulta multiplicando por 12 los denominadores (lo que equivale a dividir por 12 los miembros de las igualdades):

$$\frac{x}{16} = \frac{y}{2} = \frac{z}{9}$$

Luego resulta la **regla:**

Para repartir un número en partes directamente proporcionales a varias fracciones, se reducen éstas a común denominador, y luego se reparte el número proporcionalmente a los numeradores.

Así, en el ejemplo propuesto será:

$$x = \frac{1620 \times 16}{27} = 60 \times 16 = \mathbf{960} \quad ; \quad y \quad \frac{1620 \times 2}{27} = 60 \times 2 = \mathbf{120}$$

$$z = \frac{1620 \times 9}{27} = 60 \times 9 = \mathbf{540}$$

132. Se conoce una de las partes

EJEMPLO:

Un padre ha repartido entre sus hijos un número N de pesetas en partes proporcionales a $3, \frac{2}{3}$ *y* $1\frac{5}{6}$. *Sabiendo que la parte del segundo es 48 pesetas, ¿cuáles son las otras partes y el número N?*

Los números $3, \frac{2}{3}$ y $1\frac{5}{6}$ son equivalentes a $\frac{18}{6}, \frac{4}{6}$ y $\frac{11}{6}$.

Si **x, z** son las partes del primero y tercero, se tiene:

$$\frac{x}{18} = \frac{48}{4} = \frac{z}{11}$$

de donde

$$\frac{x}{18} = 12 \quad ; \quad \frac{z}{11} = 12$$

$$x = 18 \times 12 = \mathbf{216\ pesetas}$$

$$z = 11 \times 12 = \mathbf{132\ pesetas}$$

Por tanto,

$$N = 216 + 48 + 132 = \mathbf{396\ pesetas}$$

133. Mezclas

Con frecuencia los comerciantes se ven obligados a hacer mezclas de azúcar, café, vino, etc., de diferentes calidades y precios, con el fin de obtener otros que sean más del gusto de los clientes.

Precio de una sustancia es el valor de una unidad de la misma. Por ejemplo, el precio del azúcar es lo que vale un kilogramo de azúcar.

El valor de una cantidad se obtiene multiplicando el precio por el número de unidades que aquélla contiene. Así, en el ejemplo, si el saco tiene 100 kg. y el precio del kilogramo es 15 pesetas, el valor será:

$$15 \text{ pesetas} \times 100 = 1.500 \text{ pesetas}$$

EJEMPLOS:

1.º *El comerciante de la figura mezcla 100 kg. de azúcar a 15 pesetas con azúcar de 21 pesetas. ¿Cuántos kilogramos tomará de la segunda clase para que la mezcla resulte a 19 pesetas el kilogramo?*

Solución: El azúcar de la primera clase vale

$$15 \text{ ptas.} \times 100 = 1.500 \text{ ptas.}$$

El azúcar de la segunda clase vale

$$21 \times x$$

llamando **x** al número de kilos que se toman de la misma.

La mezcla vale

$$19 \text{ ptas. } (100 + x)$$

Igualando, resulta la ecuación

$$1500 \text{ ptas.} + 21 \times x \text{ ptas.} = 19\ (100 + x) \text{ ptas.}$$

O sea

$$1500 + 21\,x = 1900 + 19\,x;$$

$$21\,x - 19\,x = 1900 - 1500 \quad ; \quad 2\,x = 400$$

$$x = \frac{400}{2} = 200 \text{ kg.}$$

Ha de tomar **200 kg.** de la 2.ª clase.

2.º *¿Qué peso hay que tomar de cada una de las aleaciones de leyes 0,770 y 0,950 para obtener 1800 gramos de aleación de plata de ley 0,900?*

Solución: Llamando **x** la cantidad que hay que tomar de la primera aleación, la de la segunda es $1800 - x$. La ecuación es

$$0{,}770\,x + 0{,}950\ (1800 - x) = 0{,}900 \times 1800$$

o sea,

$$0{,}77\,x + 1710 - 0{,}95\,x = 1620$$

$$1710 - 1620 = 0{,}95\,x - 0{,}77\,x = 0{,}18\,x$$

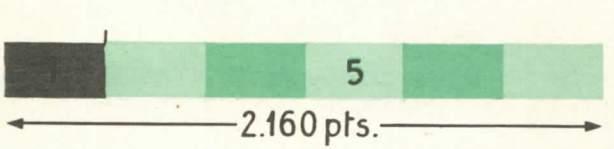
$$90 = 0{,}18\ x \quad ; \quad x = \frac{90}{0{,}18} = 500 \text{ g.}$$

Hay que tomar **500 g.** de la 1.ª y 1800 — 500 = **1300 g.** de la 2.ª

EJERCICIOS

Reparte:

1. Ochenta pesetas en partes proporcionales a 3 y 7.
2. Trescientos veintitrés kilogramos en partes proporcionales a 6 y 11.
3. Cuatrocientas sesenta toneladas en partes proporcionales a 4, 5 y 11.
4. Trescientas áreas en partes proporcionales a 200, 300 y 500.
5. Ciento ochenta pesetas en partes proporcionales a 5, 9, 10 y 12.
6. Dos mil trescientas diez en partes proporcionales a 35, 56 y 63.
7. Sesenta y cinco litros en partes proporcionales a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$.
8. Cuatrocientos veintinueve kilogramos en partes proporcionales a $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{24}$.
9. Quinientos kilómetros en partes proporcionales a 3,2, 2,5 y 4,3.
10. Siete mil gramos en partes proporcionales a 1,39, 3,24 y 5,37.
11. Reparte el número 21.600 proporcionalmente a 1, 2, 6 y 9.
12. Reparte 2.160 en dos partes, de modo que la una sea la quinta parte de la otra.



Se reparte proporcionalmente a 1 y 5

13. Tengo 14 años y mi hermana 7. Nuestros padres nos reparten 30 pesetas proporcionalmente a nuestros años. ¿Cuánto toca a cada cual?
14. Se ha hecho un reparto en tres partes proporcionalmente a 3, $\frac{1}{3}$

y $\frac{1}{6}$. La segunda parte es 48 pesetas. ¿Cuáles son las otras dos partes y el total repartido?

15. Se ha repartido un número en partes proporcionales a $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ y $\frac{7}{12}$, y la primera parte es 45. Hallar las otras dos partes y el número.

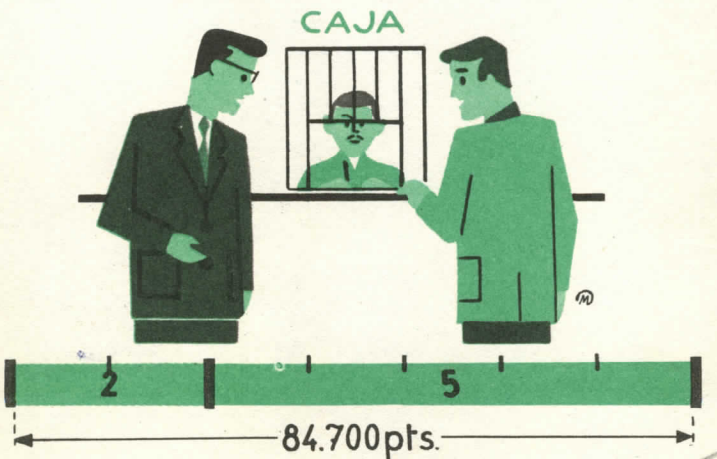
16. Un señor deja a sus tres hijos 472.600 pesetas para que se las repartan proporcionalmente a las edades que tengan el día de la muerte del padre. Cuando éste murió, las edades de los hijos eran 25, 22 y 21 años, respectivamente. ¿Qué parte recibió cada uno?

17. Una persona deja sus bienes a 5 sobrinos para que se los repartan proporcionalmente a $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{9}$. Si el primero recibe 15.120 pesetas, ¿cuánto importa lo que dejó y cuánto recibió cada sobrino?

18. Tres socios pusieron, respectivamente, en una empresa 90.000, 54.000 y 81.000 pesetas. El beneficio es 35.000 pesetas. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

19. Siendo el beneficio 90.000 pesetas, ¿cómo debe repartirse, si el capital de un socio es la mitad del otro? (*Nota:* Reparte proporcionalmente a 1 y 2.)

20. El beneficio es 84.700 pesetas y el capital de un socio es $\frac{2}{5}$ del de otro. Reparte dicho beneficio.



21. ¿Cuántos litros de aceite, a 14,40 pesetas el litro, hay que mezclar con 60 litros, a 17,70 pesetas el litro, para obtener una mezcla que resulte a 15 pesetas el litro?

22. ¿Cuántos kilogramos de café, a 90 pesetas el kilogramo, hay que mezclar con 17,50 kilogramos, a 117 pesetas, para que la mezcla pueda ser vendida a 108 pesetas?

23. ¿Cuántos litros de agua hay que añadir a 110 litros de vino que cuesta a 8,30 pesetas litro, para tener una bebida que resulte a 5,50 pesetas litro?

24. Se tienen 14 kilogramos de mantequilla a 72 pesetas el kilogramo y 10 kilogramos a 75 pesetas. ¿Cuántos kilogramos a 62 pesetas hay que añadir para que el precio de un kilogramo resulte a 68 pesetas?

25. Con vino de 400 pesetas el hectolitro y vino de 500 pesetas el hectolitro se hace una mezcla de 220 litros que se vende a 4,80 pesetas el litro. ¿Cuántos litros se han tomado de cada clase?

26. Se han vendido 180 litros de una mezcla de vinos de 8,40 pesetas el litro y de 9,75 pesetas. El valor de la venta ha sido de 1.674 pesetas. ¿Cuántos litros de cada clase contiene esta mezcla?

27. Un lingote de oro de ley 0,850 pesa 87,5 gramos. ¿Cuántos gramos de ley 0,675 hay que añadir para obtener una aleación de ley 0,800?

28. ¿Cuánta plata de ley 0,835 hay que añadir a 5,2 kilogramos de plata pura para obtener un lingote de ley 0,900?

29. Se tiene dos lingotes de plata de leyes 0,950 y 0,780. ¿Cuánto debe tomarse de cada lingote para tener 6,8 kilogramos de ley 0,800?

30. Se funden juntos un lingote de plata de ley 0,880 y un vaso de plata de ley 0,800. La aleación obtenida pesa 864 gramos y su ley es de 0,835. Halla el peso del lingote y el del vaso.

31. Se funden juntos un lingote de oro puro y un lingote de ley 0,750. Halla el peso de cada lingote, sabiendo que la aleación obtenida pesa 850 gramos y su ley es 0,825.

23

Aplicación a la Aritmética Comercial

134. Porcentajes

Si de cada 100 alumnos de un colegio hay ocho enfermos, diremos que el 8 por 100 (8%) de los alumnos de dicho colegio están enfermos. El 8% se lee "ocho por ciento".

EJEMPLOS:

1.º *Si el colegio anterior tiene 850 alumnos, ¿cuántos alumnos hay enfermos?*

Solución: Hay enfermos

$$\frac{8}{100} \times 850 = \frac{8 \times 850}{100} = \frac{6.800}{100} = \mathbf{68\ alumnos}$$

2.º *De los 40 alumnos de clase, 25 han sabido la lección. ¿Qué tanto por ciento de los alumnos ha sabido la lección?*

Solución: Han sabido $\frac{25}{40}$ por cada uno, y por cada cien

$$\frac{25}{40} \times 100 = \frac{2.500}{40} = \frac{250}{4} = \mathbf{62{,}5\%}$$

135. Interés simple

Cuando un señor deposita su dinero en el Banco, éste se compromete a devolverle no solamente su **capital**, o cantidad depositada, sino además **los intereses** que ha producido durante el **tiempo** que estuvo depositada.

Se llama **rédito** o **tanto por ciento (%)** al interés que producen 100 pesetas en un año. Suele variar del 1 por 100 al 7 por 100.

Para facilitar los cálculos, se conviene en que el año sólo tiene 360 días y se divide en 12 meses iguales de 30 días cada uno. Sin embargo, para determinar la duración de un préstamo o de una colocación cuyas fechas extremas se indican, hay que tener en cuenta los usos siguientes:

1.º Se da a cada mes su número exacto de días.

2.º No se cuenta el primer día, pero sí se cuenta el día de la devolución del préstamo.

EJEMPLOS:

Del 6 de marzo al 13 de marzo hay 7 días; del 6 de marzo al 13 de abril hay 38 días; del 11 de mayo al 11 de julio hay 61 días.

136. Cálculo del interés simple

EJEMPLOS:

1.º *Calcular el interés que producirían 12.560 pesetas prestadas al 3 por 100 durante 4 años.*

Solución: Si 100 pesetas producen 3, una peseta producirá $\frac{3}{100}$ y 12.560 pesetas producirán

$$\frac{3}{100} \times 12.560 \text{ pesetas}$$

Esto en 1 año; pero en 4 años el interés producido es

$$I = \frac{3}{100} \times 12.560 \times 4 = \frac{12.560 \times 3 \times 4}{100} = \mathbf{1.507{,}20\ ptas.}$$

Como los razonamientos seguidos son aplicables a cualquier caso análogo, resulta esta **regla:**

Para calcular el interés producido durante cierto número de años, se halla el producto del capital por el tanto por ciento y el tiempo, y se divide por 100.

Si **I** es el interés, **c** el capital, **r** el rédito o tanto por ciento y **t** el tiempo, la regla anterior viene expresada por la fórmula:

$$I = \frac{c\,r\,t}{100} \qquad (1)$$

2.º *Calcular el interés que producirán 8.540 pesetas prestadas al 4 por 100 durante un año y tres meses.*

Solución: 1 año y 3 meses = 15 meses = $\frac{15}{12}$ años.

Aplicando la fórmula (1) y sustituyendo las letras por sus valores en este problema, resulta:

$$I = \frac{8.540 \times 4 \times \frac{15}{12}}{100} = \frac{8.540 \times 4 \times 15}{1.200} = \mathbf{427\ pesetas}$$

En general, designando por **m** el número de meses, el interés producido cuando el tiempo se da en meses, será:

$$I = \frac{c\,r\,m}{1.200} \qquad (2)$$

3.º *Calcular el interés que producirán 4.800 pesetas prestadas al 5 por 100 durante 75 días.*

$$75 \text{ días} = \frac{75}{360} \text{ años}$$

Aplicando la fórmula (1) y sustituyendo las letras por sus valores en este problema, resulta:

$$I = \frac{4.800 \times 5 \times \frac{75}{360}}{100} = \frac{4.800 \times 5 \times 75}{36.000} = \mathbf{50\ pesetas}$$

En general, si el tiempo se da en días, designando por **d** el número de días, tenemos para el interés producido:

$$\mathbf{I} = \frac{c\,r\,d}{36.000} \qquad (3)$$

137. Aplicación de las ecuaciones

Muchos problemas de Aritmética comercial pueden resolverse fácilmente mediante ecuaciones, como se indica en los siguientes ejemplos:

1.º *Una persona coloca los* $\frac{3}{7}$ *de su capital al 4 por 100 durante 6 meses, y el resto, al 4,5 por 100 durante 8 meses. La suma de los intereses es 1.305 pesetas. Hallar dicho capital.*

Solución: Sea C el capital, $\frac{3\,C}{7}$ la primera parte y $\frac{4\,C}{7}$ la segunda.

En este caso, la suma de los intereses será:

$$\frac{4 \times \frac{3\,C}{7} \times 6}{1.200} + \frac{4{,}5 \times \frac{4\,C}{7} \times 8}{1.200} = 1.305.$$

Luego multiplicando por $1.200 \cdot 7 = 8.400$, queda

$$72\ C + 144\ C = 1.305 \times 8.400;$$

o sea:

$$C = \frac{1.305 \times 8.400}{216} = \textbf{50.750 pesetas.}$$

2.º *Dos capitales colocados al 4,5 por 100 durante 4 meses producen juntos 714 pesetas. Hallar estos capitales sabiendo que difieren en 4.600 pesetas.*

Solución: Llamando C a uno de los capitales, el otro valdrá C + 4.600. Luego

$$\frac{C \cdot 4,5 \cdot 4}{1.200} + \frac{(C + 4.600)\ 4,5 \cdot 4}{1.200} = 714.$$

Multiplicando por 1.200, resulta

$$18\ C + (C + 4.600)\ 18 = 714 \times 1.200 = 856.800$$

Quitando paréntesis:

$$18\ C + 18\ C + 82.800 = 856.800,$$

o sea,

$$36\ C = 856.800 - 82.800 = 774.000$$

$$C = \frac{774.000}{36} = \textbf{21.500 pesetas.}$$

El otro capital es: $21.500 + 4.600 = \textbf{26.100 pesetas.}$

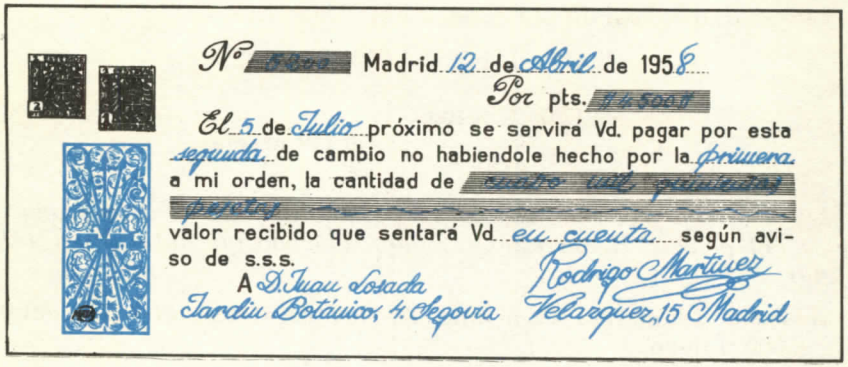
138. Descuento comercial

Cuando un comprador no paga al contado, frecuentemente firma un documento por el que se compromete a pagar el importe de la mercancía dentro de un plazo determinado, previamente convenido con el vendedor.

Este documento puede extenderlo el deudor, y recibe el nombre de **pagaré,** o bien el acreedor, y recibe el nombre de **letra de cambio.**

La letra de cambio es la invitación escrita del acreedor (vendedor) al deudor (comprador) para que pague a su orden (o a la orden de un tercero), y en una fecha indicada en la letra, la cantidad en ella inscrita con todas sus letras.

NOTA.—Sobre el fondo puntillado de la parte superior de estos efectos, se consigna la cantidad en cifras y sobre el del medio, en letras.



La letra de cambio es redactada por el vendedor, que la hace aceptar y firmar por el comprador.

Este documento es pagadero a la orden de don Rodrigo Martínez, es decir, a sí mismo o a quien él designe. El señor Martínez puede, pues, servirse de él como de papel moneda para pagar a un acreedor, o también venderlo a un Banco. El 5 de julio, aquel que esté en posesión del efecto lo presentará a don Juan Losada y recibirá las 4.500 pesetas.

Cuando el poseedor de un pagaré o de una letra de cambio quiere cobrarlos antes de su vencimiento, lo cede a un banquero o a otra persona, que al pagarlo retiene para sí una parte de la cantidad inscrita en el documento. La cantidad inscrita en el documento se llama **valor nominal;** la cantidad retenida por el pagador se llama **descuento,** y la entregada al poseedor, **valor actual o efectivo** del documento. Luego el **valor actual** es la **diferencia entre el valor nominal y el descuento.**

Llamando **A** al valor actual, **N** al valor nominal y **d** al descuento, se tiene

$$A = N - d \qquad (4)$$

Si el señor Martínez hubiera guardado su letra de cambio hasta el 5 de julio, habría recibido entonces 4.500 pesetas. Lógicamente será necesario que, colocando el valor actual a interés desde el 1 de junio al 5 de julio, se convierta en 4.500 pesetas; es decir, será necesario que el descuento sea igual al interés del valor actual (descuento racional). Pero en la práctica se acostumbra a calcular el descuento sobre el valor nominal (descuento comercial). Así, los cálculos serán más fáciles, ya que el valor nominal de un efecto es conocido, mientras que el valor actual se desconoce.

Descuento comercial es el interés simple del valor nominal del documento durante el tiempo que media entre el día de la negociación y el día del vencimiento.

Los problemas de descuento pueden, por tanto, resolverse como problemas de interés. Ya que el tiempo suele darse en días, la fórmula

del descuento comercial será la fórmula (3) del número 136 sustituyendo **C** por el valor nominal **N**; o sea:

$$d = \frac{N\,r\,t}{36.000} \qquad (5)$$

EJEMPLOS:

1.º *¿Cuál es el 7 de junio el valor actual de una letra de cambio de 8.000 pesetas pagaderas el 21 de agosto, si se descuenta el 6 por 100?*

Solución: En el presente caso no contando el día 7 de junio de dicho mes, quedan 30 — 7 = 23 días; de julio son 31 días y de agosto 21 días contando el día del vencimiento, ya que no se contó el día inicial. Luego faltan hasta dicho día:

$$23 + 31 + 21 = 75 \text{ días}$$

Por tanto:

$$d = \frac{8.000 \times 6 \cdot 75}{36.000} = 100 \text{ pesetas}$$

y el valor actual es:

$$A = N - d = 8.000 - 100 = \mathbf{7.900 \text{ pesetas.}}$$

2.º *Hallar el descuento comercial de un pagaré de 510 pesetas, al 4 por 100, por anticipar su pago 6 meses.*

Solución: Aplicando la fórmula (5) resulta:

$$d = \frac{510 \cdot 4 \cdot 6}{1.200} = \mathbf{10{,}20 \text{ pesetas.}}$$

3.º *Se ha negociado una letra de cambio al 4 por 100, 72 días antes de su vencimiento. El descuento excede en 26,25 ptas. al* $\frac{1}{200}$ *del valor nominal de la letra. Hallar dicho valor nominal.*

Solución: Llamando N al valor nominal de la letra, el descuento será $\frac{N}{200} + 26{,}25$, y por tanto

$$\frac{N}{200} + 26{,}25 = \frac{N \times 4 \times 72}{36.000}$$

Quitando denominadores, o sea multiplicando por 36.000,

$$180\ N + 945.000 = 288\ N$$

Es decir,

$$945.000 = 288\ N - 180\ N = 108\ N$$

$$N = \frac{945.000}{108} = \mathbf{8.750\ ptas.}$$

EJERCICIOS

1. Calcula el interés de 2400 pesetas al 5 por 100 durante: *a*) 2 años, *b*) 3 meses; *c*) 36 días.

2. Calcula el interés de 5000 pesetas al 4 por 100 durante: *a*) 4 años; *b*) 9 meses; *c*) 45 días.

3. Calcula el interés de 12000 pesetas al 6 por 100 durante: *a*) 3 años; *b*) 10 meses; *c*) 40 días.

Calcula:

4. Al 5 por 100 el descuento de un efecto de 3700 pesetas pagadero a 3 meses.

5. Al 6 por 100 el descuento de un efecto de 78250 pesetas pagadero a 36 días.

6. Al 4,5 por 100 el descuento de un efecto de 31600 pesetas pagadero el 24 de septiembre y negociado el 13 de agosto.

¿Cuánto se recibe por un efecto:

7. De 9300 pesetas pagadero a 2 meses y descontado al 4 por 100.

8. De 7200 pesetas pagadero a 49 días y descontado al 3,5 por 100.

9. Al cabo de 2 años, dos capitales colocados al 5 por 100 han producido 1870 pesetas de interés. El interés del primero excede a los $\frac{5}{8}$ del interés del segundo en 50 pesetas. ¿Cuáles son dichos capitales?

10. Un capital, colocado al 5 por 100 durante 10 meses, produce 375 pesetas menos que otro capital colocado al 5,5 por 100 durante 15 meses. Hallar los dos capitales sabiendo que la suma de los mismos es 44000 pesetas.

11. Una persona coloca los $\frac{3}{4}$ de un capital al 4 por 100 y el resto al 5 por 100. El interés anual es 2550 pesetas. Se pide la cantidad colocada a cada tanto por ciento.

12. Una persona coloca durante 5 meses los $\frac{2}{3}$ de un capital al 3,5 por 100 y el resto al 4 por 100. La diferencia de intereses es 150 pesetas. ¿Cuál es dicho capital?

13. Tengo 68000 ptas. Coloco una parte al 5,5 por 100 y el resto al 5 por 100. Halla las dos partes, sabiendo que la suma de los intereses anuales es 3525 ptas.

14. Un capital de 100000 ptas. fue colocado parte al 4,5 por 100 y parte al 4 por 100. Halla las dos partes sabiendo que el interés semestral de la segunda excede al de la primera en 810 ptas.

15. Pedí prestada al 4,5 por 100 una cantidad el 10 de mayo y la pagué, juntamente con sus intereses, el 5 de septiembre, entregando por todo 852,39 pesetas. ¿Cuál fue la cantidad pedida?

16. Se han recibido 13795 ptas. en concepto de capital e intereses por una cantidad prestada hace 2,5 años al 4,5 por 100. ¿A cuánto se elevan los intereses?

17. Una persona compra una propiedad. Como esta persona sólo paga después de 16 meses, el notario pide 103200 ptas., teniendo en cuenta los intereses al 5 por 100. Halla el precio de compra.

18. Se ha colocado durante un año un capital al 4,5 por 100. Sabiendo que se ha convertido en 44517 ptas., halla dicho capital.

19. Una persona había colocado cierta cantidad al 5 por 100 en un Banco, y al fin del año su depósito vale 14700 ptas., capital e interés reunidos. ¿Cuál es la cantidad que había colocado?

20. Un capital está colocado al 3,5 por 100. Otro capital, triple del primero, está colocado al 4 por 100. Después de 10 meses, el total de estos capitales y de sus intereses es 23536,25 ptas. ¿Cuáles son estos capitales?

21. Se han colocado los $\frac{5}{8}$ de un capital al 5 por 100 y el resto al 4,5 por 100. Al cabo de un año se han retirado 125775 ptas., capital e interés reunidos. Halla el capital.

24

Sistemas de ecuaciones lineales

139. Ecuación de primer grado con dos incógnitas

La igualdad

$$5x + 2y = 9$$

es una ecuación de dos incógnitas. Los dos miembros se hacen idénticos, si atribuimos a **x**, por ejemplo, el valor 3 y a **y** el valor -3, pues resulta $5 \times 3 + 2 \times (-3) = 15 - 6 = 9$. El sistema de valores: $x = 3$; $y = -3$ es una **solución** de la ecuación dada.

Es fácil ver que no es ésta la única solución de dicha ecuación, pues a cada valor arbitrario que demos a **x** corresponderá otro valor determinado para **y**, resultando, por tanto, infinitas soluciones.

Así, haciendo $x = 1$, resulta $y = 4 : 2 = 2$
" $x = 3$, " $y = -6 : 2 = -3$
" $x = -1$, " $y = 14 : 2 = 7$
" $x = -3$, " $y = 24 : 2 = 12$

y así sucesivamente. En general:

Se llama **solución** de una ecuación, con varias incógnitas, todo sistema de valores atribuidos a dichas incógnitas, que convierte la ecuación en una igualdad numérica.

Una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

140. Sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

En la práctica se presentan muchos problemas que se resuelven planteando varias ecuaciones a las cuales han de satisfacer simultáneamente las soluciones buscadas. Sea, por ejemplo, **hallar dos números cuya suma es 40 y cuya diferencia es 12.**

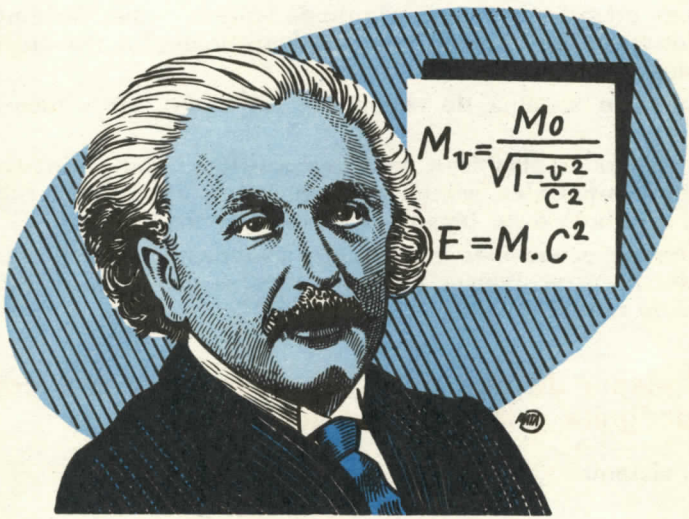
Llamemos **x** e **y** los dos números buscados. Estos han de satisfacer las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 40 \\ x - y &= 12 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Veamos si es posible encontrar una solución común a las dos ecuaciones, es decir, un par de valores que satisfaga a ambas. Diremos que las dos ecuaciones forman un **sistema,** y llamaremos **solución del sistema** a las soluciones comunes.

Sumemos miembro a miembro las dos ecuaciones (1), y en seguida restémoslas. Se obtienen así las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2\,x &= 52 \\ 2\,y &= 28 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$



Alberto Einstein (1879-1955).—Se le ha llamado "el Newton del siglo xx". Nunca, en efecto, desde los tiempos de Galileo y Newton se había hecho en la Ciencia nada que igualase en trascendencia y alcance a las concepciones geniales de Einstein. Él descubrió las fórmulas que rigen la transformación de la masa en energía, que son la base de la producción de energía atómica, mucho antes de que se hubiera sospechado la existencia de ésta. Él enunció la teoría de la relatividad, que da una explicación del universo más completa y exacta de la que anteriormente se poseía. Sus fórmulas explican, por ejemplo, por qué la masa de un cuerpo disminuye al aumentar su velocidad, acercándose a la de la luz. Nacido en Ulm (Alemania), vivió la mayor parte de su vida en Alemania, Suiza y Estados Unidos, muriendo en este último país.

Toda solución del sistema (1), o sea todo par de valores que convierte en identidades las ecuaciones (1), también convierte en identidad a su suma o su diferencia, esto es a las ecuaciones (2). Luego toda solución de (1) lo es también de (2). Recíprocamente, si sumamos y restamos las ecuaciones (2), y a continuación dividimos ambas por 2, obtenemos de nuevo las ecuaciones (1). Luego toda solución de (2) lo será igualmente de (1).

De las ecuaciones (2) se deduce fácilmente

$$x = 26 \quad ; \quad y = 14$$

Esta es la solución del sistema propuesto, como se comprueba inmediatamente.

En general diremos: **Dos o más ecuaciones forman un sistema o son simultáneas cuando tienen las mismas soluciones.**

Sistemas equivalentes son los que tienen las mismas soluciones. **Solución** de un sistema es el conjunto de valores de las incógnitas, que sustituidos en vez de ellas en todas las ecuaciones, las transforman en identidades.

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar las soluciones del mismo.

Los sistemas se clasifican en **determinados, indeterminados** y **absurdos** o **incompatibles,** según que tengan un número de soluciones limitado, ilimitado o no tengan solución ninguna.

Sistemas de ecuaciones lineales son sistemas de ecuaciones de primer grado. Para resolverlos pueden aplicarse dos métodos principalmente: el de **reducción** y el de **sustitución.**

141. Sistema de dos ecuaciones lineales, una con una incógnita, y la otra, con dos

Sea el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = 2 \\ 2x = 8 \end{array}\right\}$$

Como la segunda ecuación sólo tiene la incógnita **x,** se puede despejar y hallar su valor:

$$x = 8 : 2 = 4$$

El valor $x = 4$ pertenece a la solución del sistema, pues este número es la única solución de la segunda ecuación. Reemplacemos **x** por 4 en la primera. Resulta

$$3 \times 4 - 5 \times y = 2$$

Despejando y tenemos

$$3 \times 4 - 2 = 5\,y \quad ; \quad y = \frac{3 \times 4 - 2}{5} = 2$$

La solución del sistema dado se compone, pues, de los valores

$$x = 4 \quad ; \quad y = 2$$

Por el método seguido se comprende fácilmente que estos sistemas de ecuaciones se resuelven **hallando el valor de la incógnita en la ecuación que no tiene más que una; el valor obtenido se sustituye en seguida en la otra ecuación para obtener el valor de la otra incógnita.**

142. Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Método de reducción

Consiste en multiplicar cada ecuación por el número conveniente para que una misma incógnita tenga igual coeficiente en dos ecuaciones. Sumando o restando luego las dos ecuaciones se logra eliminar dicha incógnita.

EJEMPLOS:

1.º *Resolver el sistema:*

$$\left.\begin{aligned} 3\,x + 4\,y &= 19 \\ 7\,x - 2\,y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Solución: Multiplicando la segunda por 2, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} 3\,x + 4\,y &= 19 \\ 14\,x - 4\,y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Sumando:

$$17\,x = 17,$$

de donde:

$$x = 1.$$

Sustituyendo este valor en la primera de las ecuaciones dadas, queda:

$$3 + 4\,y = 19,$$

o sea,

$$4\,y = 19 - 3 = 16 \quad ; \quad y = \frac{16}{4} = 4.$$

2.º *Resolver por el método de reducción el sistema:*

$$\left.\begin{aligned} 8\,x + 3\,y &= 9 \\ 6\,x - 7\,y &= 53 \end{aligned}\right\}$$

Solución: Para eliminar **x** observamos que el m. c. m. de 6 y 8 es 24. Por tanto, multiplicaremos la primera ecuación por $24 : 6 = 4$; y la segunda ecuación por $24 : 8 = 3$. Resulta así:

$$24\,x - 28\,y = 212$$
$$24\,x + 9\,y = 27$$

Restando ambas queda:

$$-37\,y = 185.$$

De donde:

$$y = -\frac{185}{37} = -5$$

Sustituyendo este valor en la primera de las ecuaciones dadas:

$$6\,x + 35 = 53$$
$$6\,x = 18 \quad ; \quad x = 3.$$

Lo dicho se resume en esta regla práctica:

Para eliminar por reducción una incógnita x entre dos ecuaciones, se halla el m. c. m. de los coeficientes de x en ambas; se multiplica cada ecuación por el cociente del m. c. m. por el coeficiente de su x; por último se suman o restan según que los términos en x tuvieran signos contrarios o iguales.

143. Método de sustitución

Para eliminar una incógnita **x** por este método, se despeja en una de las ecuaciones, y se pone su expresión en lugar de **x** en la ecuación restante. Esta ya no contendrá **x**, y con la empleada en el despejo forma un sistema equivalente al dado.

EJEMPLO:

Resolver por el método de sustitución el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3\,x + 6\,y &= 21 \\ 7\,x - 4\,y &= 13 \end{aligned}\right\}$$

Solución: Despejando **x** en la primera:

$$x = \frac{21 - 6\,y}{3} = 7 - 2\,y$$

y sustituyendo este valor en la segunda, queda:

$$7\,(7 - 2\,y) - 4\,y = 13;$$

o sea,

$$49 - 14\,y - 4\,y = 13;$$
$$49 - 13 = 18\,y;$$

de donde

$$y = \frac{36}{18} = 2$$

Llevando este valor de **y** a la ecuación (3):

$$x = 7 - 2 \times 2 = 7 - 4 = 3.$$

144. Elección de método

Cualquiera de los dos métodos anteriores puede aplicarse en todas las circunstancias, pero en casos especiales cada uno tiene sus peculiares ventajas. Por tanto, es conveniente en cada caso elegir el método más adaptado al ejemplo que hay que resolver.

Si se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas suele preferirse el método de reducción.

EJEMPLO:

Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + x = 6 \\ x - 2y + 3z = -3 \\ 3x + y - z = 8 \end{array}\right\}$$

Solución: Para eliminar **x** entre las dos primeras basta multiplicar la segunda por 2 y restarlas:

$$\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 6 \\ 2x - 4y + 6z = -6 \\ \hline 7y - 5z = 12 \end{array}$$

Para eliminar **x** entre las dos últimas se multiplica la del medio por 3 y se restan:

$$\begin{array}{r} 3x - 6y + 9z = -9 \\ 3x + y - z = 8 \\ \hline -7y + 10z = -17 \end{array}$$

El sistema propuesto es, por tanto, equivalente al siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 7y - 5z = 12 \\ x - 2y + 3z = -3 \\ -7y + 10z = -17 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Puede eliminarse la incógnita **y** entre la primera ecuación y la última; sumándolas queda:

$$5z = -5$$

$$x = \frac{-5}{5} = -1.$$

Sustituyendo en la primera y segunda de las ecuaciones (4) se deduce sucesivamente:

$$7\,y + 5 = 12 \quad ; \quad y = \frac{12 - 5}{7} = 1$$

$$x - 2 - 3 = -3 \quad ; \quad x = 5 - 3 = 2$$

145. Aplicación a la resolución de problemas

Muchos problemas pueden plantearse, por medio de un sistema de ecuaciones, más cómodamente que con una sola ecuación. Para ello ha de cuidarse de establecer tantas ecuaciones como incógnitas, lo cual será posible siempre que el problema sea determinado. Además, dichas ecuaciones deben ser independientes y no contradictorias.

D. Julio Rey Pastor.—Gran matemático de fama mundial, fue el principal propulsor del resurgimiento matemático de nuestra patria. Nació en la Rioja en 1888, y murió en Buenos Aires en 1962. Durante muchos años fue profesor de Análisis matemático en la Universidad Central de Madrid. Sus trabajos son de doble naturaleza: si en unos demuestra talento profundo de investigador, en otros son evidentes sus raras aptitudes de escritor extraordinariamente dotado, de historiador y crítico eminente. En todos sus escritos resalta una gran claridad, una sencillez admirable y una depurada lógica. El extranjero colmó de elogios su obra, y la República Argentina le llamó para encauzar los estudios superiores de Ciencias exactas.

EJEMPLOS:

1.º *Se han comprado 6 kg. de azúcar y 4 kg. de café por un coste total de 166 pesetas. Sabiendo que 4 kg. de azúcar más 2 kg. de café cuestan 94 pesetas, hallar el precio del kg. de azúcar y de café.*

Solución: Llamando **x** el precio del kg. de azúcar e **y** el del café, será:

$$\left.\begin{array}{l} 6\,x + 4\,y = 166 \\ 4\,x + 2\,y = 94 \end{array}\right\}$$

Multiplicando por 2 la segunda, y restándole la primera, se obtiene:

$$2\,x = 22 \quad ; \quad \mathbf{x = 11\ pesetas}$$

y sustituyendo este valor en la segunda ecuación:

$$2\,y = 94 - 44 = 50 \quad ; \quad \mathbf{y = 25\ pesetas}$$

2.º *La suma de las tres cifras de un número es 16, y la suma de la primera y tercera es igual a la segunda. Permutando entre sí dichas cifras primera y tercera, resulta un número que supera en 198 unidades al número dado; ¿cuál es éste?*

Solución: Llamando **x** la cifra de unidades, **y** la de decenas, **z** la de centenas, el número dado vale $100\,z + 10\,y + x$, y después de permutar vale $100\,x + 10\,y + z$. Luego,

$$\left.\begin{array}{l} 100\,x + 10\,y + z = 100\,z + 10\,y + x + 198 \\ x + y + z = 16 \\ y = x + z \end{array}\right\}$$

Resuelto este sistema se obtiene: $x = 5$, $y = 8$, $z = 3$.
El número pedido es: 385.

146. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método gráfico

Por los ejemplos del número 21 se ve que la gráfica de una ecuación con dos variables es una línea que contiene todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación y solamente aquéllos. Por tanto, la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas viene dada por las coordenadas del punto de intersección de sus gráficas, ya que dichas coordenadas satisfacen a las dos ecuaciones.

EJEMPLO:

Resolver gráficamente el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,x + y = 7 \\ 2\,x - y = 1 \end{array}\right\}$$

Solución: Despejando **y** en la primera ecuación:

$$y = 7 - 2x$$

Dando valores arbitrarios a **x**, y hallando los correspondientes de **y**, formamos el siguiente cuadro de valores:

x	— 2	— 1	0	1	2	3	4
y	11	9	7	5	3	1	— 1

Representando gráficamente obtenemos una línea recta AB. En el eje de abscisas se ha tomado una unidad doble que sobre el de ordenadas.

Despejando **y** en la segunda ecuación:

$$y = 2x - 1$$

y dando valores:

x	— 2	— 1	0	1	2	3	4
y	— 5	— 3	— 1	1	3	5	7

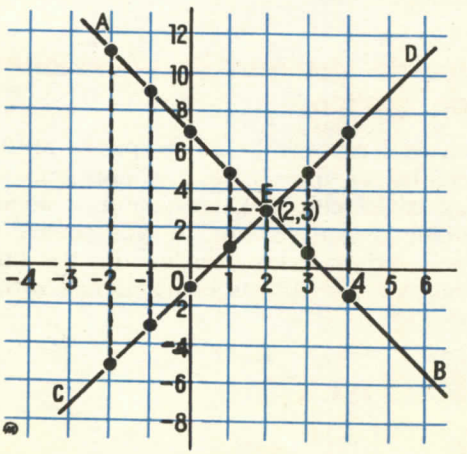
La gráfica es la recta CD.

Las dos rectas se cortan en el punto E (2, 3).

Luego

$$x = 2$$
$$y = 3$$

es la solución del sistema, ya que estos valores satisfacen a las dos ecuaciones.



EJERCICIOS

1. $\begin{cases} 7x - 5y = 52 \\ 2x + 5y = 47. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ x + y = 8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ x + 10y = 25. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - 10y = 15 \\ 2x - 4y = 18. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + 3y = 17 \\ 3x + 2y = 18. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + 4y = 25 \\ 4x + 3y = 31. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x + 6y = 32 \\ 7x - 3y = 22. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x + 6y = 39 \\ 9x - 4y = 51. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 6x - 5y = 33 \\ 4x + 4y = 44. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x + 11y = 67 \\ 5x - 3y = 5. \end{cases}$

Resuelve los sistemas siguientes por el método de sustitución:

11. $\begin{cases} x - y = 4 \\ 4y - x = 14. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y = 10 \\ 6x - 7y = 34. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x - 4y = 26 \\ x - 8y = 22. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 6x - 10y = 14 \\ y - x = 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y + 1 = 3x \\ 5x + 9 = 3y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 17 = 3x + z \\ 7 = 3z - 2x. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4y = 10 - x. \\ y - x = 5. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 7z - 3x = 18 \\ 2z - 5x = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3 - 15y = -x \\ 3 + 15y = 4x. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 1 - x = 3y \\ 3(1 - x) = 40 - y. \end{cases}$

Resuelve por cualquier método, comprobando los resultados:

21. $\begin{cases} x + z = 1{,}3 \\ x - z = 0{,}5. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + 3y = 6. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 4x + 5y = -2 \\ 5x + 4y = 2. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 0{,}5x - y = 2{,}8 \\ 0{,}3x + 5y = 2{,}8. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x + 3 = y - 3 \\ 2(x + 3) = 6 - y. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 5x - y = 12 \\ x + 3y = 12. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4(2 - x) = 3y \\ 2(2 - x) = 2(y - 2). \end{cases}$

28. $\begin{cases} (x + 1) + (y - 2) = 7 \\ (x + 1) - (y - 2) = 5. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + \dfrac{y}{3} = 11 \\ \dfrac{x}{3} + 3y = 21. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} + \dfrac{4y}{5} = 21 \\ \dfrac{2x}{3} + \dfrac{3y}{5} = 17. \end{cases}$

31. La edad de un padre es hoy 3 veces la de su hijo, y hace 6 años era 5 veces la edad del hijo. ¿Cuántos años tiene cada uno?

32. Encontrar dos números tales que añadiendo 3 al primero se obtenga el segundo, y en cambio, añadiendo 2 al segundo se obtenga el doble del primero.

33. Encontrar dos números tales que el triplo del primero aumentado en 2 sea igual al segundo, mientras que el doble del segundo disminuido en 1 sea igual a 7 veces el primero.

34. Hallar dos números tales que la suma de la quinta parte del primero con la tercera parte del segundo sea 13, mientras que los $\frac{2}{7}$ del primero disminuidos en los $\frac{2}{9}$ del segundo sea igual a 6.

35. Hallar dos números cuya diferencia es 685, y su cociente es 5, dando 25 como resto de la división.

36. La suma de dos números es 14. Añadiendo 1 al mayor se obtiene el doble del menor. Hallar los dos números.

37. Hallar dos números tales que la suma del doble del primero y del quíntuplo del segundo sea 101, y que la suma del cuádruplo del primero y del triplo del segundo sea 111.

38. Hallar dos números tales que el primero aumentado en 4 veces el segundo dé por resultado 29, y el segundo aumentado en 6 veces el primero dé por resultado 36.

39. Dos números están entre sí como 5 es a 3; restando 10 al primero y añadiendo 10 al segundo, la razón se invierte. ¿Cuáles son los dos números?

40. Dos segundos después de oír el disparo de su fusil, un soldado oye el choque de la bala contra el blanco. Si las velocidades del sonido y de la bala son 340 m/s. y 510 m/s., halla la distancia del blanco.

41. Al pagar dos facturas que importan 1.750 pesetas, un comerciante, por pagar al contado, consigue un descuento de 10 por 100 para una y 5 por 100 para la otra, y así paga las dos con 1.660 pesetas. ¿Cuál era el valor de cada factura?

42. Un comerciante tiene dos clases de café, de 30 y 40 pesetas kg., respectivamente. ¿Cuántos kg. de cada clase debe tomar para hacer una mezcla de 70 kg. de 36 pesetas kg?

43. Un hombre recorre 105 km. en bicicleta en 3 h. y 45 min. Si va con una velocidad de 32 km. por h. en el campo y de 20 km. por h. en la ciudad, ¿cuántos kilómetros de su recorrido están en el campo?

44. Un fotógrafo tiene dos frascos de revelador diluido. En uno, el 10 por 100 de su contenido es revelador y el resto agua. En el otro la mezcla es mitad por mitad. ¿Cuánto debe tomar de cada frasco para obtener 80 gramos de mezcla en que haya un 25 por 100 de revelador?

45. En un recipiente hay 10 kg. de mezcla de alcohol y agua. Se añade cierta cantidad de agua y así hay 30 por 100 de alcohol sobre el total. Se añade otra cantidad igual de agua y entonces el alcohol es 20 por 100 del total. ¿Cuánta agua se añadió y qué cantidad hay de alcohol?

Resuelve los sistemas siguientes:

46. $x + y + z = 6$
$3x - y + 2z = 7$
$2x + 3y - z = 5.$

47. $x + y + z = 9$
$27x + 9y + 3z = 93$
$8x + 4y + 2z = 36.$

48. $7x + y + 3z = 52$
$4x - 5y + 6z = 13$
$x + 15y - 9z = 52.$

49. $3x + 2z = 6 - 2y$
$x - 5y + 6z = 2$
$6x - 8z = 12.$

50. $x + y = 1$
$y + z = 9$
$x + z + 6 = 0.$

51. $2x + y - z = 7$
$y - z = 1$
$3z - y = 1.$

52. $x + y + z = 6$
$x - y - z = -4$
$2x + y + 3z = 13.$

53. $2x - y - z = 8$
$x + y - z = 4$
$x - y + z = 0.$

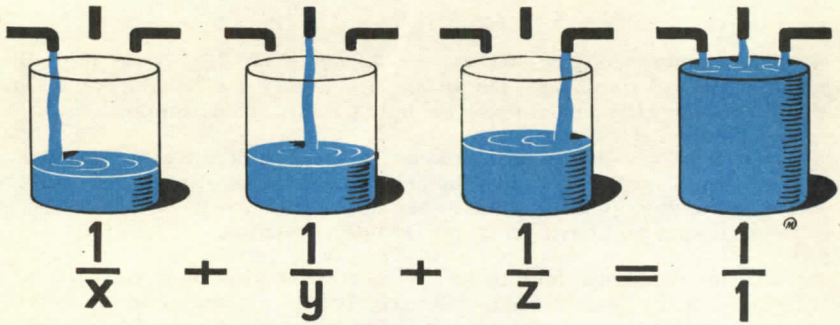
54. $2x + 5y - 7z = 9$
$5x - y + 3z = 16$
$7x - 8y + z = 6.$

55. $x + 2y = 26$
$3x + 4z = 56$
$5y + 6z = 65.$

56. La suma de las tres cifras de un número es 16. La suma de la primera y tercera es igual a la segunda; y si se permutan entre sí las cifras de las unidades y de las centenas, el número resultante es 10 veces menor que el propuesto. ¿Cuál es éste?

57. Un hombre ha colocado tres capitales como sigue: el primero al 5 por 100 y el segundo al 4 por 100, dando una renta de 4.900 pesetas; el segundo al 5 por 100 y el tercero al 3 por 100, resultando una renta de 5.400 pesetas. Los tres capitales suman 190.000 pesetas. ¿Cuánto vale cada capital?

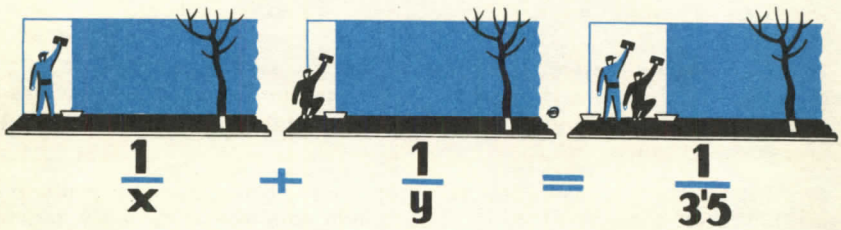
58. Un señor tiene dos hijos, de los cuales uno tiene 6 años más que el otro. Después de 2 años la edad del padre será doble de la suma de las edades de sus hijos, y hace 6 años su edad era 4 veces la suma de las edades de sus hijos. ¿Cuál es la edad de cada uno?



59. Tres tubos, A, B, C, pueden echar agua en una cisterna o sacarla de ella. Si A y B la echan y C la saca, la cisterna se llena en 3 horas. Si A y C la echan y B la saca, la cisterna se llena en 2 horas. Si los tres tubos la echan juntos, la cisterna se llena en 1 hora. ¿Cuánto tiempo empleará cada tubo en llenarla solo? (Plantea las ecuaciones expresando la parte de depósito que llenan en 1 hora, según se hace en la figura.)

60. Una caja contiene una mezcla de 30 kg. de avena y 15 kg. de cebada; otra, una mezcla de 15 kg. de avena y 30 kg. de trigo; una tercera, una mezcla de 20 kg. de cebada y 20 de trigo. La primera caja vale 270 pesetas, la segunda 375 pesetas y la tercera 360. ¿Cuál es el precio de cada uno de los tres cereales?

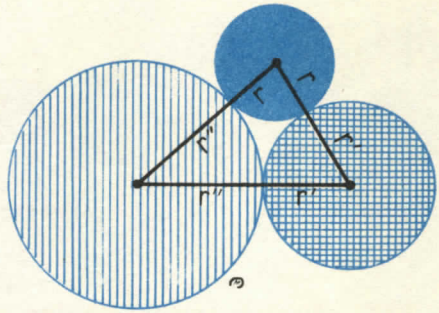
61. Tres números son tales que el segundo más $\frac{1}{3}$ del primero suman 68; la mitad del tercero más $\frac{2}{3}$ del primero suman 81, y el tercero más $\frac{1}{3}$ del segundo suma 124. Hallar los números.



62. A y B trabajando juntos pueden terminar un trabajo en 3,5 horas, A y C en 2,5 horas y B y C en 3 horas. ¿Cuánto tiempo emplearía cada uno en hacer él solo el trabajo? (Plantea las ecuaciones con las partes de trabajo que hacen en 1 hora, como se hace en la figura.)

63. Si 5 kg. de garbanzos, 5 de alubias y 3 de lentejas cuestan 100 pesetas; 3 kg. de garbanzos, 5 de alubias y 6 de lentejas, 95 ptas., y 4 kg. de garbanzos, 4 de alubias y 8 de lentejas, 108 pesetas, ¿cuál es el valor de cada kilogramo de legumbres?

64. Los lados de un triángulo miden 13, 14 y 17 cm., respectivamente. Con centro en sus tres vértices se trazan tres circunferencias que son tangentes entre sí dos a dos. Halla los radios de las mismas.



65. Los lados a y b de un triángulo suman 30 mm., los b y c suman 41 mm. y los a y c, 37 mm. Halla dichos lados.

66. Halla un número de tres cifras, sabiendo que la suma de éstas es 12, que el doble de la segunda es igual a la suma de la primera y la tercera, y que permutando estas dos entre sí resulta un número que supera al dado en 594 unidades.

67. Dividir el número 900 en tres partes, de manera que la primera dividida por la segunda dé como cociente 2 y resto 1, y la segunda dividida por la tercera dé el mismo resultado.

68. Hallar la cantidad de vino que hay en dos vasijas, sabiendo que los 3/8 de la primera equivalen a los 3/5 de la segunda, y que los 2/3 de la primera contienen 40 litros más que los 4/5 de la segunda.

69. Los alumnos de los tres primeros cursos de un colegio suman 260. El número de alumnos de primer curso es al de segundo como 19 : 18, y el número de alumnos de segundo curso es al de tercero como 6 : 5. Halla los alumnos de cada curso.

70. Un pescadero lleva al mercado 8 kg. de merluza, 13 de pescadilla y 15 de sardina, y lo vende todo ello en 380 ptas. Otro lleva 9 kg. de merluza, 17 kg. de pescadilla y 15 kg. de sardina, cobrando por todo 440 ptas. Una cocinera compra 1 kg. de cada clase de pescado y paga 36 ptas. ¿A cómo estaban los precios de cada clase de pescado aquel día?

71. Ha llegado una escuadra, formada por acorazados, cruceros y destructores. Cada acorazado tiene 8 cañones, 12 antiaéreos y 4 hélices. Los cruceros tienen 4 cañones, 10 antiaéreos y 3 hélices. Los destructores tienen 6 antiaéreos y 2 hélices. En total la escuadra cuenta con 60 cañones, 246 antiaéreos y 79 hélices. ¿Cuántos buques de cada clase tiene la escuadra?

25

Inecuaciones

147. Propiedades de las desigualdades

Podemos dar para los números racionales la siguiente definición

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + x = \beta \quad ; \quad x > 0 \tag{1}$$

La expresión $\alpha < \beta$ es una desigualdad. Lo que está delante del signo $<$ se llama **primer miembro** de la desigualdad; lo que está detrás, **segundo miembro.**

Se verifican las siguientes propiedades:

1.ª **Si a los miembros de una desigualdad se suma un mismo número, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.**

Y en general: **Sumando miembro a miembro desigualdades del mismo sentido, resulta otra desigualdad del mismo sentido.**

Así de las desigualdades

$$\left.\begin{array}{l}(+\ 23/4) > (+\ 8/5) \\ (-\ 18/4) > (-\ 37/5)\end{array}\right\} \tag{2}$$

se deduce

$$(+\ 23/4) + (-\ 18/4) > (+\ 8/5) + (-\ 37/5),$$

o sea

$$(+\ 5/4) > (-\ 29/5).$$

En efecto, las desigualdades (2) se pueden escribir

$$\left.\begin{array}{l}(+\ 23/4) = (+\ 8/5) + a \\ (-\ 18/4) = (-\ 37/5) + b\end{array}\right\} \tag{3}$$

siendo **a** y **b** números positivos. Aplicando la ley uniforme a las igualdades (3) se obtiene

$$(+\ 23/4) + (-\ 18/4) = (+\ 8/5) + (-\ 37/5) + a + b,$$

de donde inmediatamente se deduce lo que queríamos demostrar.

2.ª **Si se multiplica los dos miembros de una desigualdad por un número positivo, resulta otra desigualdad del mismo sentido.**

Así, si es

$$a > b$$

se tendrá

$$a = b \times n,$$

siendo $n > 1$. Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por los de la igualdad evidente

$$c = c,$$

según la ley uniforme, se tendrá

$$a \times c = b \times n \times c,$$

lo que indica que

$$a \times c > b \times c, \tag{4}$$

según queríamos demostrar.

Trasponiendo términos en la desigualdad (4) se obtiene

$$-b \times c > -a \times c$$

o sea

$$-a \times c < -b \times c$$

Luego, de ser

$$a > b$$
$$-c = -c$$

se deduce

$$-\mathbf{a} \times \mathbf{c} < -\mathbf{b} \times \mathbf{c} \tag{5}$$

esto es, se verifica la siguiente propiedad:

3.ª **Si se multiplica los dos miembros de una desigualdad por un número negativo, resulta otra desigualdad de sentido contrario a la dada.**

En particular, si se cambian los signos de los términos de una desigualdad, hay que cambiar también el sentido de la desigualdad, pues ello equivale a multiplicar ambos miembros por -1.

Así, de ser:

$$-3 < -1$$

se deduce multiplicando ambos miembros por -1:

$$3 > 1.$$

148. Inecuaciones

Inecuación es una desigualdad condicional entre unas cantidades conocidas y otras desconocidas, llamadas incógnitas.

Las inecuaciones de primer grado pueden resolverse aplicando las propiedades de las desigualdades, exactamente como las ecuaciones se resuelven por aplicación de propiedades referentes a las igualdades.

EJEMPLOS:

1.º *Hallar los valores de* x *que satisfacen la inecuación*

$$3x - 4 > \frac{7x}{2} + 2.$$

Solución: Multiplicando por 2.

$$6x - 8 > 7x + 4.$$

Restando 7x y añadiendo 8:

$$-x > 12.$$

Trasponiendo términos:

$$x < -12.$$

Pero esta desigualdad es igual a la anterior, cambiando los signos y el sentido de la igualdad. Luego:

Si se cambian los signos en una inecuación, hay que cambiar también el sentido de la desigualdad.

2.º *Hallar los valores de* x *que satisfacen a las inecuaciones:*

$$\begin{cases} 4x - 11 > \dfrac{x}{3} & (6) \\ 10 - x > 5. & (7) \end{cases}$$

Solución: Multiplicando ambos miembros de (6) por 3, resulta:

$$12x - 33 > x;$$

trasponiendo:

$$11x > 33.$$

Luego $x > 3$.

De la inecuación (7) sale $x < 5$.

Luego ambas inecuaciones quedarán satisfechas por todos los números reales mayores que 3 y menores que 5, y sólo por ellos, lo que se expresa así:

$$3 < x < 5$$

3.º *Si el triplo del número de gallinas de un gallinero, aumentado en 16, es mayor que el doble de las mismas sumado con 27; y si el cuádruplo*

de dichas gallinas, disminuido en 46, es menor que el doble de las mismas disminuido en 6, ¿cuántas gallinas hay en el gallinero?

Solución: Sea **x** el número de gallinas del gallinero. Tendremos las dos inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 16 > 2x + 27. & (8) \\ 4x - 46 < 2x - 6. & (9) \end{cases}$$

Resuelta la primera, da:

$$x > 11.$$

Resuelta la segunda, da:

$$x < 20.$$

Luego la solución es:

$$x > 11 \quad y \quad x < 20.$$

Por tanto, las condiciones del problema quedan satisfechas por un número de gallinas mayor que 11 y menor que 20.

$$\mathbf{11 < x < 20}$$

4. *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} 2x - 3y > 5; \\ x - 4y = 6. \end{cases}$$

Solución: Multiplicando los dos miembros de la ecuación por 3 y los de la inecuación por 4, resulta:

$$8x - 12y > 20.$$
$$3x - 12y = 18.$$

Restando miembro a miembro la ecuación de la inecuación, se tiene:

$$5x > 2.$$

Luego

$$x > \frac{2}{5}.$$

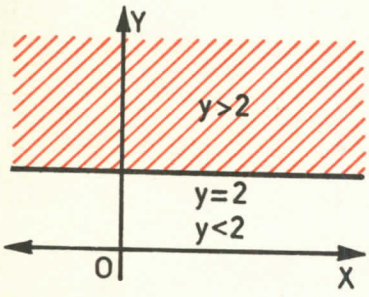
Sustituyendo este valor extremo en la inecuación dada, resulta:

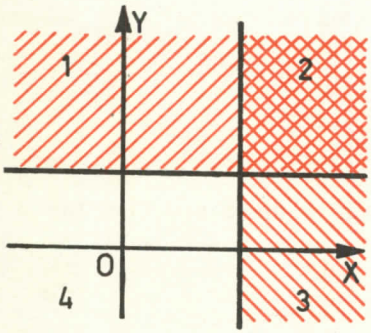
$$y > -\frac{7}{5}.$$

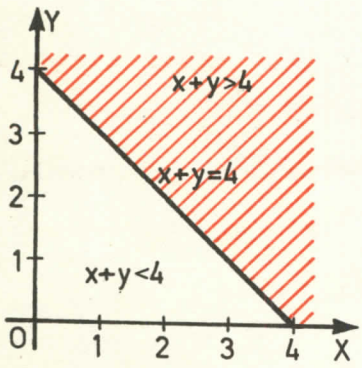
Luego la solución del sistema es:

$$\mathbf{x > \frac{2}{5} \quad ; \quad y > -\frac{7}{5}}$$

Cada valor de x mayor que $\frac{2}{5}$ nos da el correspondiente valor de y.







149. Regiones en el plano

1. Traza la recta $y = 2$. Dicha recta divide al conjunto de todos los puntos de su plano en tres subconjuntos: a) {puntos que están a un lado de la recta}; b) {puntos que están al otro lado de la recta}; c) {puntos que están sobre la recta}.

De las dos primeras regiones en que $y = 2$ divide al plano, para una es $y > 2$, y para la otra es $y < 2$. Como la recta $y = 2$ es paralela al eje OX, la región $y > 2$ es la que está encima de la recta, y la región $y < 2$ es la que está debajo.

2. Traza ahora las rectas $x = 3$, $y = 2$. ¿Cuántas regiones se forman ahora?

Se forman cuatro regiones, que son:

1) $\{x < 3, y > 2\}$
2) $\{x > 3, y > 2\}$
3) $\{x > 3, y < 2\}$
4) $\{x < 3, y < 2\}$

Si L designa la región $x < 3$, y M designa la región $y > 2$, ¿qué es $L \cap M$? Es

$$L \cap M = \{(x, y) \mid x < 3, y > 2\} = 1)$$

¿A qué región pertenece el punto (5, 3)?

3. Traza la recta $x + y = 4$. Considera el punto (3, 6). Es $3 + 6 > 4$, esto es (3, 6) es un punto para el cual $x + y > 4$. Comprueba que esto es verdad para varios puntos del mismo lado de la recta que (3, 6).

Raya la región para la cual $x + y > 4$.

Así, en la figura

$x + y = 4$, en la misma línea.
$x + y < 4$ } dos regiones, una a
$x + y > 4$ } cada lado de la línea

En resumen, cuando se traza una línea en una gráfica, aquélla divide los puntos del plano en tres subconjuntos, a cada uno de los cuales corresponde una relación.

Para determinar una región particular, es necesario hallar primero la línea frontera.

Hay que rotular las regiones como en la figura.

EJERCICIOS

1 ¿Cuáles son los valores extremos de **x** determinados por las siguientes condiciones:

$$3x - 2 > \frac{1}{2}x - \frac{4}{5} \quad ; \quad \frac{7}{6} - \frac{5x}{4} < 8 - 2x?$$

2. El duplo de un número disminuido en 5 es mayor que 25, y el triplo del número disminuido en 7 es menor que su duplo aumentado en 13. ¿Qué números satisfacen estas condiciones?

3. Una compañía de transportes tiene un número de aeroplanos tal que el triplo del número aumentado en 2 excede al duplo del número aumentado en 61, y 5 veces el número disminuido en 70 es menor que el cuádruplo del mismo disminuido en 9. ¿Cuántos aeroplanos tiene la compañía?

4. Hallar el valor entero de **x** que satisface las siguientes inecuaciones:

$$3x + 1 > 13 - x$$
$$4x - 7 < 2x + 3$$

Hallar los valores límite de **x** e **y** que satisfacen a los siguientes sistemas:

5. $5x + y > 46 - y.$
   $2y - 2x = -8.$

6. $2x + 3y < 57.$
   $4x + 2y = 64.$

7. $5x + y > 51.$
   $3x - y = 21.$

8. $x - y > 3.$
   $x - 2y = -8.$

9. Traza gráficas separadas y muestra, rayándolas, las regiones representadas por las siguientes inecuaciones:

a) $y > 6$; *b)* $x > 0$; *c)* $y < x$; *d)* $x + y > 6$.

10. Sea

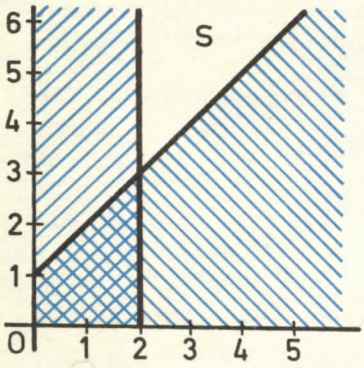
$$R = \{(x, y) \mid x > 4\}$$
$$S = \{(x, y) \mid y < 3\}$$
$$T = \{(x, y) \mid x < 6\}$$

Traza gráficas separadas y muestra por rayado las regiones representadas por

a) $R \cap S$; *b*) $S \cap T$; *c*) $R \cap T$.

11. Traza primero las rectas $y = 2x$ e $y = x + 2$; después raya la región $\{(x, y) \mid y > 2x\} \cap \{(x, y) \mid y > x + 2\}$

12. Representa la región S en la figura como la intersección de dos conjuntos.



13. Traza la recta $x + y = 5$ y señala los puntos $(2\frac{1}{2}, 3)$ y $(2, 4)$. ¿Satisfacen ambos puntos la inecuación $x + y > 5$?

Sin referirte a tu diagrama, escribe las coordenadas de tres puntos más que estén del mismo lado de la recta $x + y = 5$ que los dos puntos dados, y las coordenadas de tres del otro lado.

14. Traza la recta $2y = x + 2$ y señala los puntos (1, 4) (2, 3) y (5, 4). Estos puntos satisfacen $2y > x + 2$ ó $2y < x + 2$?

Escribe las coordenadas de tres puntos del otro lado de la recta.

15. Establece si los puntos dados en cada par están en el mismo o en opuesto lado de las rectas dadas.

a) (1, 6), (2, 7), $y = 5$

b) (3, 4), (5, 8), $y = x$.

c) (1, 6), $(2, 6\frac{1}{2})$, $y = 2x + 3$

d) (1, 5), (5, 1), $x + 2y = 9$.

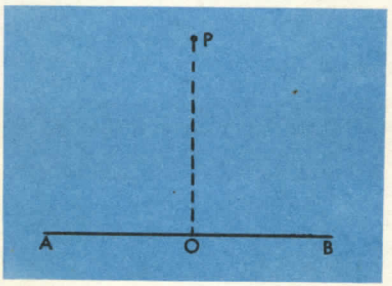
26

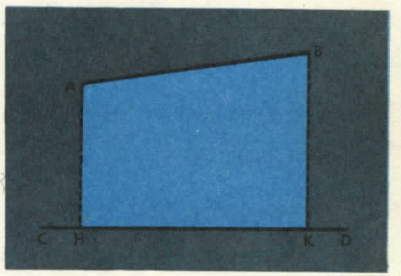
Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

150. Proyecciones

Proyección de un punto sobre una recta es el pie de la perpendicular trazada desde dicho punto a la recta.

Así, el punto O es la proyección del punto P sobre AB.





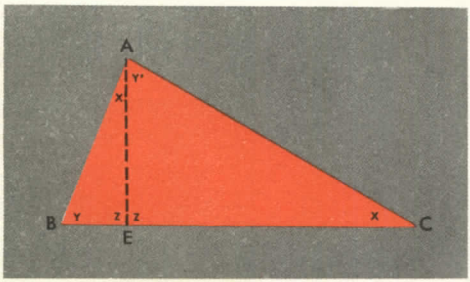
Proyección de un segmento sobre una recta es el segmento cuyo origen y extremo son las proyecciones del origen y extremo del segmento dado. Así, HK es la proyección del segmento AB sobre CD.

151. Propiedad de la altura sobre la hipotenusa

La altura sobre la hipotenusa divide al triángulo rectángulo en otros dos semejantes entre sí, y al dado.

Hipótesis: $\triangle$ ABC con $\hat{A}$ recto y AE $\perp$ BC.

Tesis: Demostrar que: $\triangle$ ABE $\sim \triangle$ AEC $\sim \triangle$ ABC.



Demostración:

$\widehat{z'} = \widehat{z}$, por ser AE $\perp$ BC.

$\widehat{y'} = \widehat{y}$, $\widehat{x'} = \widehat{x}$, por tener sus lados perpendiculares.

1.º $\triangle$ AEB $\sim$ $\triangle$ AEC, por el primer caso de semejanza (número 100).

2.º $\triangle$ AEB $\sim$ $\triangle$ ABC, porque $\widehat{A} = \widehat{z'}$ y $\widehat{B}$ común; luego se aplica el primer caso de semejanza.

3.º $\triangle$ AEC $\sim$ $\triangle$ ABC, porque $\widehat{A} = \widehat{z'}$ y $\widehat{C}$ común; luego se aplica el primer caso de semejanza.

152. Teorema de la altura

Ya que en triángulos semejantes los lados opuestos a ángulos iguales son proporcionales, de la semejanza de los triángulos AEB y AEC resulta:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}; \quad \text{o sea,} \quad \overline{AE}^2 = \overline{BE} \times \overline{EC} \qquad (1)$$

llamando $\overline{BE}$ la medida del segmento BE, etc.

La altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos en que divide a ésta.

153. Teorema del cateto

De la semejanza de los triángulos ABE y ABC resulta:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{EB}}; \quad \text{o sea,} \quad \overline{AB}^2 = \overline{BC} \times \overline{BE} \qquad (2)$$

De la semejanza de los triángulos AEC y ABC resulta:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}; \quad \text{o sea,} \quad \overline{AC}^2 = \overline{BC} \times \overline{CE} \qquad (3)$$

Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre la hipotenusa.

154. Razón de los cuadrados de los catetos

Dividiendo las igualdades (2) y (3), resulta:

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \qquad (4)$$

Los cuadrados de los catetos son proporcionales a sus proyecciones sobre la hipotenusa.

155. Teorema de Pitágoras

Sumando las igualdades (2) y (3) resulta:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \times \overline{BE} + \overline{BC} \times \overline{CE} = \overline{BC}\,(\overline{BE} + \overline{CE}) = \\ = \overline{BC} \times \overline{BC},$$

o sea,

$$\mathbf{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2} \qquad (5)$$

El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

EJEMPLOS:

1.º *En un triángulo rectángulo los catetos miden 124 y 93 mm., respectivamente. Hallar la hipotenusa, las proyecciones de los catetos y la altura sobre la misma.*

Llamando **a** a la hipotenusa y aplicando el teorema (5), se tiene:

$$a^2 = 124^2 + 93^2 = 24025 \quad ; \quad a = \sqrt{24025} = \mathbf{155\ mm.}$$

Llamando **m** y **n** a las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa y aplicando las relaciones (2) y (3):

$$124^2 = 155 \times m \quad ; \quad m = \frac{124^2}{155} = \mathbf{99{,}2\ mm.}$$

$$93^2 = 155 \times n \quad ; \quad n = \frac{93^2}{155} = \mathbf{55{,}8\ mm.}$$

Llamando **h** a la altura sobre la hipotenusa y aplicando el teorema (1):

$$h^2 = m \times n = \frac{124^2}{155} \times \frac{93^2}{155} = \frac{124^2 \times 93^2}{155^2}$$

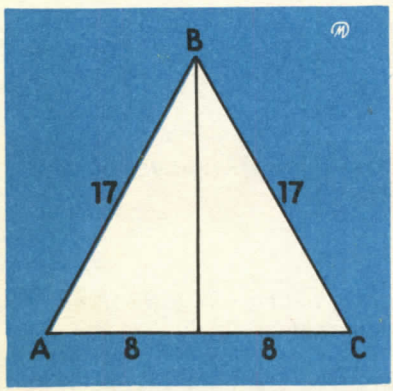
$$h = \frac{124 \times 93}{155} = \mathbf{74{,}4\ mm.}$$

2.º *En un triángulo rectángulo un cateto es doble del otro. Hallar la razón de las proyecciones de dichos catetos sobre la hipotenusa.*

Aplicando el teorema (4) se obtiene:

$$\frac{m}{n} = \frac{2^2}{1^2} = 4$$

3.º *En un triángulo isósceles los lados iguales miden 17 m. y la base 16 m. Hallar la altura.*



Dicha altura divide al triángulo en dos triángulos rectángulos iguales, cuya hipotenusa es el lado de 17 m. y un cateto es la mitad de la base, o sea, 8 m. Luego aplicando el teorema de Pitágoras:

$$17^2 = 8^2 + h^2$$

$$h^2 = 17^2 - 8^2 = 225$$

$$h = \sqrt{225} = 15\ m.$$

4.º *La proyección de un cateto sobre la hipotenusa mide 32 centímetros, y la altura correspondiente a la misma es de 24 cm. Hallar los lados del triángulo.*

Solución: Llamando **c** al cateto en cuestión, tendremos, aplicando la fórmula (5):

$$c^2 = 32^2 + 24^2 = 1600;$$

luego

$$c = \sqrt{1600} = \mathbf{40\ cm.}$$

Aplicando ahora la fórmula (4):

$$24^2 = b_1 \times 32$$

luego

$$b_1 = \frac{24^2}{32} = 18$$

Por tanto, la hipotenusa vale:

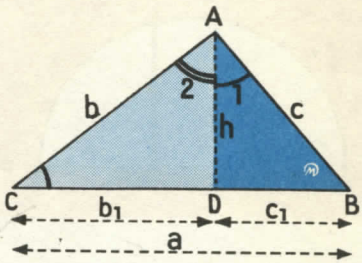
$$32\ cm. + 18\ cm. = \mathbf{50\ cm.}$$

5.º *Sabiendo que los catetos de un triángulo rectángulo miden 15,6 dm. y 20,8 dm., hallar: a) la hipotenusa; b) la altura sobre dicha hipotenusa.*

Solución:

a) $a^2 = 15{,}6^2 + 20{,}8^2 = 676$

$a = \sqrt{676} = \mathbf{26\ dm.}$



b) Observando la figura, se ve que el doble del área del triángulo vale a $\times$ h y también b $\times$ c; luego

$$a \times h = b \times c$$

En nuestro caso:

$$26 \times h = 15{,}6 \times 20{,}8$$

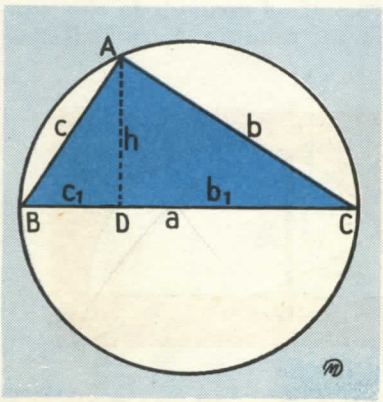
de donde

$$h = \frac{15{,}6 \times 20{,}8}{26} = \mathbf{12{,}48\ dm.}$$

156. Aplicación a la circunferencia

Sea ABC un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia de diámetro BC; trazando la altura **h** sobre la hipotenusa, se tiene:

1.º $c^2 = a \times c_1$; $b^2 = a \times b_1$, luego: **en un círculo una cuerda es media proporcional entre el diámetro que pasa por uno de sus extremos y su proyección sobre dicho diámetro.**

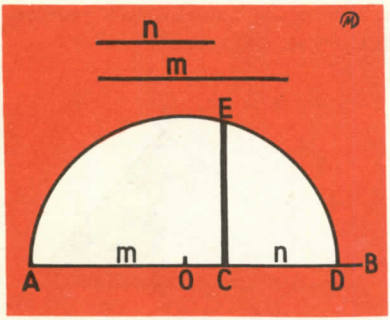


2.º Ya que $h = b_1 \times c_1$, resulta que: **la perpendicular desde un punto de una circunferencia sobre un diámetro es media proporcional entre los dos segmentos en que lo divide.**

3.º Del número 154 se deduce que: **si desde el extremo de un diámetro se trazan varias cuerdas, los cuadrados de sus longitudes son proporcionales a sus proyecciones sobre el diámetro.**

157. Construcción del segmento media proporcional

Se trata de construir un segmento media proporcional entre dos segmentos dados m **y** n.



Construcción 1.ª Sobre una recta AB se lleva AC = m, y a continuación CD = n.

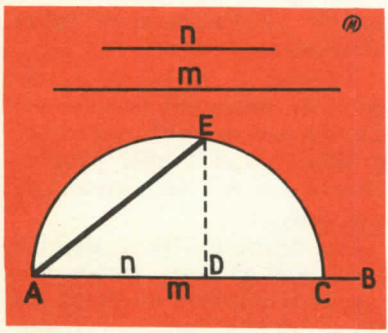
Se traza una semicircunferencia con AD como diámetro, y en seguida la perpendicular CE a AD; CE es la media proporcional pedida entre **m** y **n**, según el número 156, 2.º.

Nota: De esta construcción se deduce que la media aritmética de dos números o segmentos, **m** y **n**, es mayor que su media geométrica, pues

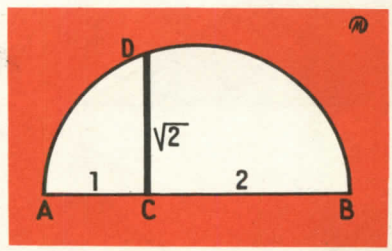
$$\frac{m+n}{2} = AO > CE$$

si **m** y **n** son desiguales. Si **m** = **n**, la media geométrica llega a ser igual a la media aritmética. Luego: **el producto de dos números de suma constante es máximo cuando los factores son iguales.**

Construcción 2.ª Sobre una recta AB se llevan en el mismo sentido y a partir del mismo punto los segmentos AC = m y AD = n. Se traza la circunferencia de diámetro AC, y en D se levanta la perpendicular DE. La cuerda AE es la media proporcional pedida entre **m** y **n**, según el número 156, 1.º.



Aplicación.—**Construir la raíz cuadrada de un número.** Para hallar la raíz cuadrada de 2 se toman sobre una recta dos factores de 2, como 2 y 1, del mismo modo que **m** y **n** en la construcción anterior.



La media proporcional CD entre AC y CB representa gráficamente la raíz de 2.

Mide CD y comprueba extrayendo la raíz cuadrada de 2 con dos decimales.

EJERCICIOS

1. Halla el tercer lado de estos triángulos rectángulos:

	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º
Cateto	3	9	21	?	4	1	?	c	?	$\sqrt{2}$
Cateto	4	12	28	24	?	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$ s	c	6	$\sqrt{2}$
Hipotenusa . .	?	?	?	25	8	?	s	?	6,5	?

2. Una escalera de mano de 10 m. de larga está apoyada contra una pared; si el pie de la escalera dista 6 m. de la pared, ¿a qué altura alcanza?

3. Halla la altura de un triángulo isósceles, cuya base mide 1,6 m. y los lados 1,8 m. cada uno.

4. Si la diagonal de un cuadrado mide 12 cm., halla la longitud del lado.

5. El lado de un triángulo equilátero mide 2 cm. Halla la altura.

6. Demuestra que la diagonal de un cuadrado es igual al producto del lado por $\sqrt{2}$.

7. Expresa la altura de un triángulo equilátero en función del lado.

8. Demuestra que un triángulo rectángulo en que el cateto menor es la mitad de la hipotenusa tiene sus ángulos agudos de 30º y 60º (es la mitad de un triángulo equilátero).

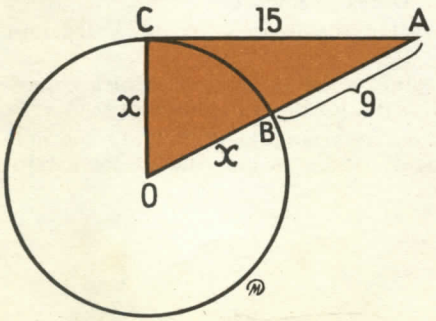
9. En el triángulo del problema anterior la hipotenusa mide 146 mm. Halla los catetos.

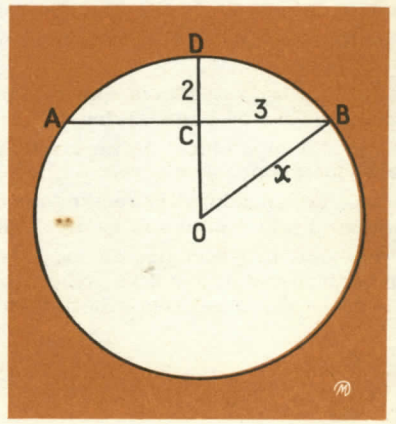
10. Construye un segmento igual a:

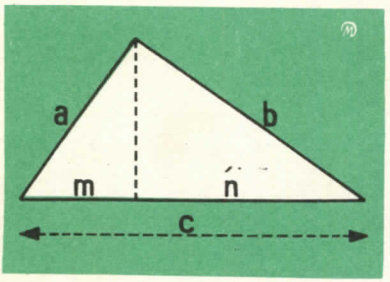
a) $\sqrt{5}$; [$5 \times 1 = x^2$].
b) $\sqrt{6}$; [$3 \times 2 = x^2$].
c) $\sqrt{8}$; [$4 \times 2 = x^2$].
d) $\sqrt{2\,a\,b}$; [$2\,a \times b = x^2$].
e) $\sqrt{3\,a^2}$; [$3\,a \times a = x^2$].
f) $\sqrt{10\,a^2}$; [$2\,a \times 5\,a = x^2$].

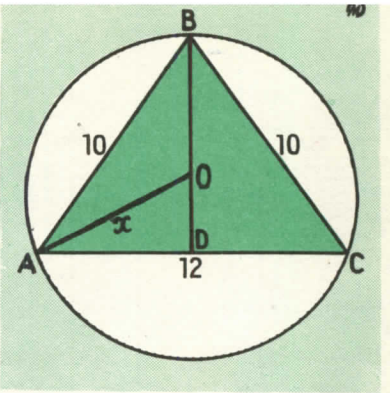
11. Hallar la longitud del radio de una circunferencia, si mide 15 cm. la tangente trazada desde un punto A que dista 9 cm. de la circunferencia. (Aplica el teorema de Pitágoras al triángulo O C A).

12. Una cuerda mide 6 cm., y su punto medio dista 2 cm. del punto medio del arco. Hallar el radio de la circunferencia. (Observa que O C = = x — 2, y aplica el teorema de Pitágoras al triángulo O C B.)









13. En el triángulo rectángulo de la figura, halla c, m, n, h, si a $=$ 5 dm. y b $=$ 12 dm.

14. Los lados del triángulo de la figura miden 10, 10 y 12 cm. Halla el radio x $=$ O A $=$ O B del círculo circunscrito. (Observa que A D $=$ 6 cm. y O D $=$ 8 $-$ x).

15. En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa divide a ésta en dos partes que miden 3 cm. y 12 cm. Halla las longitudes de la altura y los catetos.

16. En un triángulo rectángulo, la razón de los catetos es $\frac{1}{2}$. Halla la razón de los segmentos en que la altura divide a la hipotenusa.

17. Las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son 5 cm. y 12 cm. Halla la longtiud de la altura y los segmentos en que ésta divide a la hipotenusa.

18. La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a ésta en dos segmentos cuya razón es 3. Halla la razón de los catetos.

19. Si en el ejercicio anterior los segmentos están en la razón $k : l$, hallar la razón de los catetos.

20. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 91 mm. y un cateto 35 mm. Halla el otro cateto y la altura sobre la hipotenusa.

21. En un triángulo dos lados miden 13 cm. y 12,5 cm., respectivamente; la altura sobre el tercer lado es 12 cm. Halla dicho tercer lado.

22. Halla la distancia entre los lados paralelos de un rombo, cuyas diagonales miden 21 cm. y 28 cm. respectivamente.

Indicación: Dicha distancia es el doble de la distancia del centro del rombo al lado.

23. Halla la distancia que hay de un vértice a la diagonal opuesta de un rectángulo cuyos lados miden 4 y 3 cm., respectivamente.

24. La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide $\sqrt{128}$ mm. Halla los catetos y el área.

25. En un triángulo rectángulo un cateto mide 15 cm. y la altura correspondiente a la hipotenusa es de 12 cm. Calcula los demás elementos y el área.

26. Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 3 y 9 m., respectivamente. Halla la longitud de los catetos y la de la altura relativa a la hipotenusa.

27

Angulos en la circunferencia

158. Ángulo central y arco correspondiente

Ángulo central es un ángulo cuyo vértice está en el centro de la circunferencia. El arco de circunferencia interior al ángulo central se llama **arco correspondiente** al ángulo.

Dos semirrectas Oa, Ob que salen del centro O de una circunferencia cortan a la circunferencia respectivamente en A y B; aquéllas determinan dos ángulos, y se ha convenido en llamar $\widehat{aOb}$ al ángulo convexo; aquellas determinan también dos arcos de extremos A y B y se conviene en llamar $\widehat{AB}$ al que está interceptado por $\widehat{aOb}$.

EJEMPLOS:

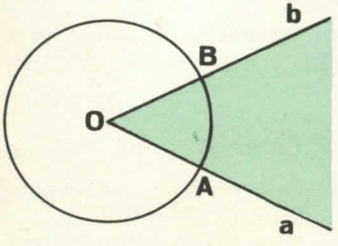
1.º Traza un arco AB y, por doblado alrededor de un diámetro, otro arco igual a él, $\widehat{CD}$.

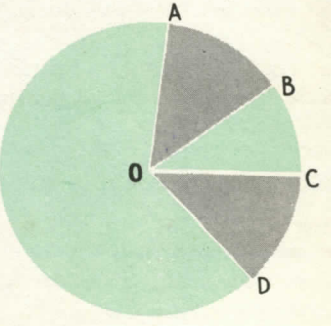
Tenemos, pues

$$\widehat{AB} = \widehat{CD}$$

Unamos ahora los puntos C y D con O. Comprobaremos fácilmente por superposición, doblando de nuevo, que

$$\widehat{AOB} = \widehat{COD}$$





A arcos iguales corresponden ángulos centrales iguales.

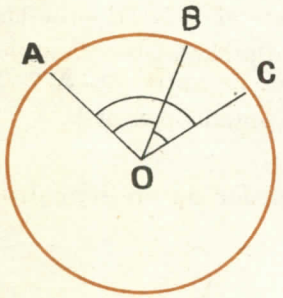
2.º Demuestra, de modo análogo, el **recíproco** del teorema anterior, o sea

A ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales.

159. Proporcionalidad entre los ángulos centrales y sus arcos correspondientes

¿Qué clase de correspondencia es la definida entre los arcos de una circunferencia y sus ángulos centrales correspondientes?

Es una correspondencia biunívoca, pues según el teorema anterior, a cada arco general le corresponde un solo ángulo general, y a cada ángulo general un solo arco general.



Además sean dos ángulos centrales consecutivos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ cuyos arcos correspondientes $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{BC}$ también son consecutivos. Es evidente que el ángulo $\widehat{AOC}$ suma de los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ corresponde el arco AC suma de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{BC}$. O sea:

a $\quad \widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$

corresponde $\quad \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}$

Entre ángulos centrales y sus arcos correspondientes hay una correspondencia biunívoca, la cual hace corresponder a la suma de los ángulos la suma de sus arcos.

Esa correspondencia biunívoca es un **isomorfismo** entre el semigrupo de los ángulos y el semigrupo de los arcos.

EJEMPLO:

Aplica el isomorfismo anterior para hacer la suma de ángulos.

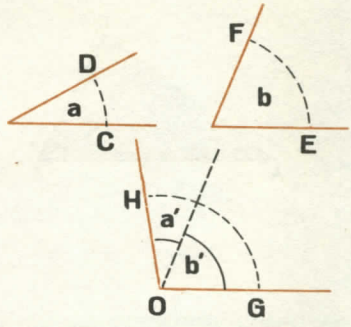
Para **sumar** dos ángulos $\hat{a}$ y $\hat{b}$ se les traza un arco correspondiente, con el mismo radio, y haciendo centro en el origen de una semirrecta se traza un arco de igual radio que los correspondientes a $\hat{a}$ y $\hat{b}$. Sobre este arco se llevan consecutivamente los de $\hat{a}$ y $\hat{b}$, y a

la suma de estos arcos corresponde la suma de los ángulos. Así; por ser

$$\widehat{GH} = \widehat{CD} + \widehat{EF}$$

será

$$\widehat{GOH} = \widehat{a'} + \widehat{b'} = \widehat{a} + \widehat{b}$$



160. Medida de los ángulos centrales.

Según el número anterior, la división de un arco AB en un número cualquiera de partes iguales, produce en su ángulo central correspondiente la división en igual número de partes iguales. Y si tomamos como unidad de arcos el que corresponda a la unidad de ángulos, el mismo número expresará la medida del ángulo y de su arco correspondiente. Así se pueden medir los arcos por sus ángulos centrales correspondientes, y éstos por aquéllos, gracias al isomorfismo entre ambos. Ahora bien, ya que la igualdad de arcos es mucho más fácil de apreciar a simple vista que la de ángulos, de ahí que para medir éstos se prefiera emplear **limbos circulares.** Es el aparato llamado **transportador de ángulos.**

La medida de un ángulo central es igual a la de su arco correspondiente.

En esta lección vamos a hallar las relaciones entre los ángulos cuyos vértices no están en el centro de la circunferencia, y los arcos de la misma. Un ángulo cuyo vértice no está en el centro de la circunferencia puede ser **inscrito, semiinscrito, interior** o **exterior** de la misma.

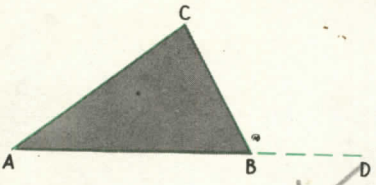
Estudiaremos sucesivamente cada uno de ellos.

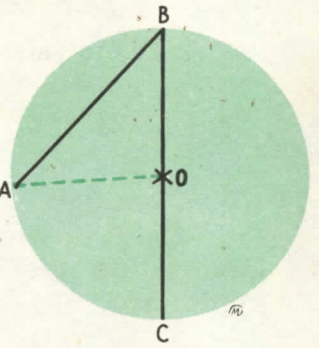
161. Ángulo exterior de un triángulo

Al ángulo DBC formado por el lado BC del triángulo ABC y la prolongación del AB, se le llama **ángulo exterior** del triángulo.

Es fácil ver que el $\widehat{DBC}$ tiene como suplemento al $\widehat{B}$, o sea que entre los dos suman 2 rectos. Pero también el $\widehat{A} + \widehat{C}$ tiene como suplemento al $\widehat{B}$, ya que los tres ángulos de un triángulo suman 2 rectos. Luego

$$\widehat{DBC} = \widehat{A} + \widehat{C}$$





Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes.

162. Ángulo inscrito

Se dice que un ángulo está **inscrito** en una circunferencia si tiene su vértice en la misma y sus lados son cuerdas. Así el ángulo ABC es inscrito en la circunferencia de centro O, y se dice que **abarca** entre sus lados al arco AC. Hallemos la relación que existe entre la medida del ángulo inscrito y la del arco que abarca, suponiendo que el lado BC es un diámetro. Unamos O con A. El triángulo ABO es isósceles, ya que los lados OA y OB son iguales, por ser radios. Luego $\hat{A} = \hat{B}$. Por otra parte, $\widehat{AOC}$ es exterior al triángulo ABO, y por tanto vale igual que la suma $\hat{A} + \hat{B} = \widehat{2B}$. Luego el $\hat{B}$ vale la mitad del $\widehat{AOC}$, cuya medida es la del arco AC.

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

Fácilmente se demuestra lo mismo, aunque el lado no sea el diámetro.

La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la del arco que abarcan sus lados.

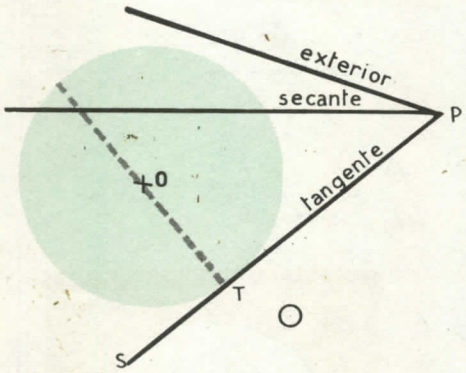
163. Posiciones de una recta respecto de una circunferencia

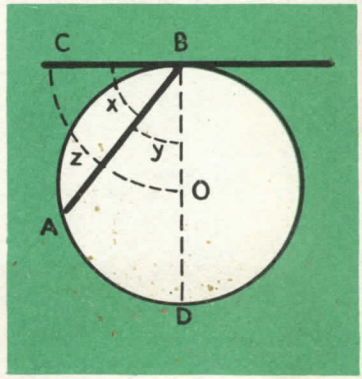
Por un punto P exterior a una circunferencia traza en papel transparente una recta que no corta a la circunferencia en ningún punto, a la que se llama **exterior;** otra que le corta en dos puntos, a la que se llama **secante,** y otra que le toca sólo en un punto, a la que se llama **tangente.** En este último caso al punto T común a la circunferencia

y a la recta se llama **punto de contacto.** Unámoslo con el centro O y doblemos la figura por el diámetro OT.

Los semicírculos coinciden y TS va a confundirse con TP. Luego los ángulos en T son rectos.

La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.





164. Ángulo semiinscrito

Se dice que un ángulo está **semiinscrito** en una circunferencia si tiene un vértice en la misma y uno de sus lados es secante y el otro tangente a dicha circunferencia. Por ejemplo, el ángulo ABC en la figura última.

Para hallar su valor se traza el diámetro BD y se tiene:

$$\hat{z} = 90^{o} = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}$$

ya que la tangente siempre es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto. Luego

$$\hat{x} = \hat{z} - \hat{y} = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BA}}{2}$$

El ángulo semiinscrito tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.

165. Consecuencias

1.º Todos los ángulos inscritos en el mismo arco son iguales.

Así,

$$\widehat{AC_1B} = \widehat{AC_2B} = \ldots = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

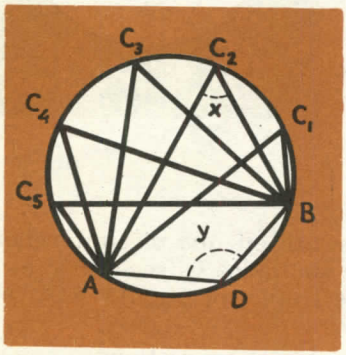
2.º Dos ángulos inscritos en cada uno de los arcos que una cuerda determina, son suplementarios.

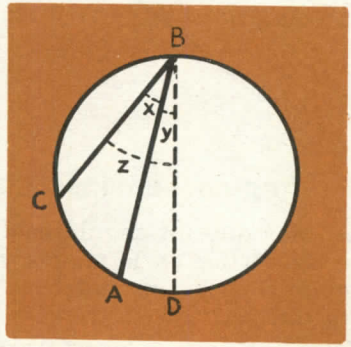
Así,

$$\hat{x} = \frac{\widehat{ADB}}{2} \quad ; \quad \hat{y} = \frac{\widehat{AC_2B}}{2}$$

luego:

$$\hat{x} + \hat{y} = \frac{\widehat{ADB} + \widehat{AC_2B}}{2} = 180^\circ$$





166. Problemas

1.º *Si* $\widehat{AC} = 63^\circ\ 21',\ 46''$, *halla* $\widehat{ABC}$.

Será:

$$\widehat{ABC} = \frac{63^\circ\ 21'\ 46''}{2} = 31^\circ\ 40'\ 53''$$

2.º *Si* $\hat{x} = 37^\circ\ 11'\ 5''$ *e* $\hat{y} = 16^\circ\ 33'\ 28''$, *halla* $\widehat{AC}$, $\widehat{DA}$ *y* $\widehat{BC}$.

Será:

$$\hat{x} = \frac{\widehat{AC}}{2} \quad ; \quad \widehat{AC} = 2\hat{x} = 74^\circ\ 22'\ 10''$$

$$\widehat{DA} = 2 \times 16^\circ\ 33'\ 28'' = 33^\circ\ 6'\ 56''$$

$$\overset{\frown}{BC} = 180^\circ - (\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DA}) = 180^\circ - (74^\circ\ 22'\ 10'' + 33^\circ\ 6'\ 56'') = 180^\circ - 107^\circ\ 29'\ 6'' = 72^\circ\ 30'\ 54''$$

167. Ángulo interior

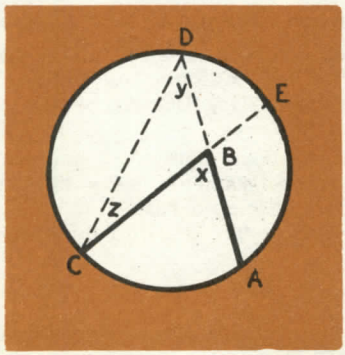
Ángulo **interior** a una circunferencia es aquél cuyo vértice es un punto interior a dicha circunferencia. Por ejemplo, el ángulo ABC en la figura adjunta.

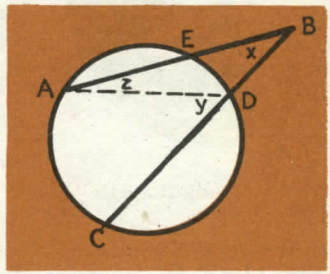
Sea el ángulo ABC. Prolonguemos sus lados y tracemos la recta CD.

Se tiene, por ser **x** ángulo exterior del triángulo BCD:

$$\hat{x} = \hat{y} + \hat{z} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DE}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DE}}{2}$$

La medida de un ángulo interior es igual a la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de éstos.





168. Ángulo exterior

Ángulo **exterior** a una circunferencia es aquel cuyo vértice es exterior a la misma y cuyos lados son secantes o tangentes a dicha circunferencia. Por ejemplo, el ángulo ABC en la figura última.

Trazada la recta AD, se tiene, por ser $\hat{y}$ ángulo exterior del triángulo ABD:

$$\hat{x} = \hat{y} - \hat{z} = \frac{\overset{\frown}{CA}}{2} - \frac{\overset{\frown}{DE}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DE}}{2} \quad \text{c. q. d.}$$

La medida de un ángulo exterior es igual a la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.

EJEMPLO:

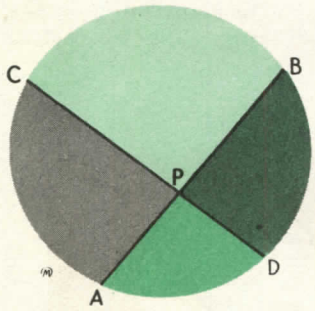
Si en la figura es $\overset{\frown}{AC} = 124^o$ *y* $\overset{\frown}{DE} = 40^o$ *halla* $\hat{x}$.

Solución:

$$\hat{x} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DE}}{2} = \frac{124^o - 40^o}{2} = \frac{84^o}{2} = 42^o$$

EJERCICIOS

1. Si en la figura adjunta los arcos AC y BD miden 95° y 80°, respectivamente, ¿cuántos grados tiene el ángulo APC?



2. Si los arcos BC y AD miden 203° y 38°, respectivamente, ¿cuántos grados tiene el ángulo APC?

3. Si $\overset{\frown}{APC} = 80^o$ y $\overset{\frown}{BD} = 59^o$, ¿cuántos grados mide el arco AC?

4. Sobre una circunferencia O se construyen arcos consecutivos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, que miden 30°, 80° y 90°. Calcula los ángulos que forman las rectas AD y BC, AB y CD, AC y BD.

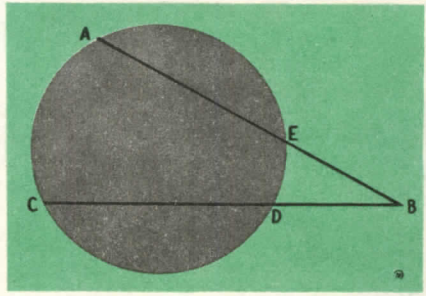
5. Si en la figura siguiente los arcos AC y ED valen, respectivamente, 80° y 35°, ¿cuántos grados mide el ángulo ABC?

6. Si el ángulo ABC = 30° y el arco AC = 90°, ¿cuánto mide el arco ED?

7. Si $\overset{\frown}{CA}$ y $\overset{\frown}{ED}$ miden, respectivamente, 126° y 90°, ¿cuántos grados mide el ángulo ABC?

8. Si $\overset{\frown}{ABC} = 20^o$ y el arco AC mide 120°, ¿cuántos mide el arco ED?

9. Si el $\overset{\frown}{AC}$ mide 200° y el $\overset{\frown}{ED} = 60^o$, ¿cuánto mide el ángulo ABC?



10. Sobre una circunferencia se llevan arcos consecutivos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EF}$, tales que los ángulos centrales correspondientes miden 20°, 40°, 30°, 90° y 45°. Calcula los ángulos del polígono ABCDEF.

11. El menor de los arcos interceptados por dos tangentes trazadas desde un punto externo mide 70° 45', ¿cuál es la medida del ángulo de las tangentes?

12. ¿Cuánto mide un ángulo semiinscrito que abarca entre sus lados un arco de 187° 26'?

13. Un ángulo interior abarca entre sus lados y las prolongaciones de éstos, arcos de 145° 36' y 64° 58', respectivametne. ¿Cuál es su medida?

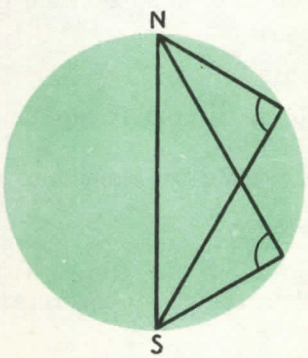
14. Un ángulo exterior a una circunferencia mide 43° 25' y sus lados determinan en la misma dos arcos que suman 213° 30'. Halla estos arcos.

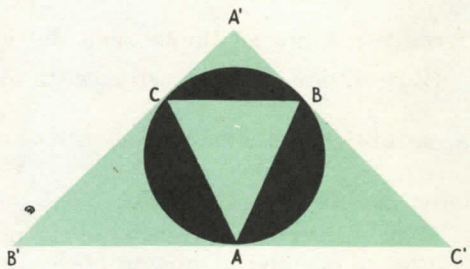
15. Una cuerda subtiende un arco de 78° 36'. ¿Qué ángulo forma con el diámetro trazado en uno de sus extremos?

16. Un ángulo de 67° 35' 16" tiene su vértice sobre una circunferencia. ¿Cuánto vale el arco interceptado por sus lados?

17. ¿Bajo qué ángulo se ve el eje terrestre desde un punto cualquiera de la superficie de la Tierra (supuesta esférica)? ¿Cómo son los ángulos inscritos en media circunferencia?

18. Un triángulo ABC está inscrito en una circunferencia, y $\hat{A} = 50°$, $\hat{B} = 70°$. Se trazan tangentes por A, B y C de modo que formen el triángulo circunscrito A'B'C'. Hallar los ángulos $\hat{A'}$, $\hat{B'}$ y $\hat{C'}$.





28

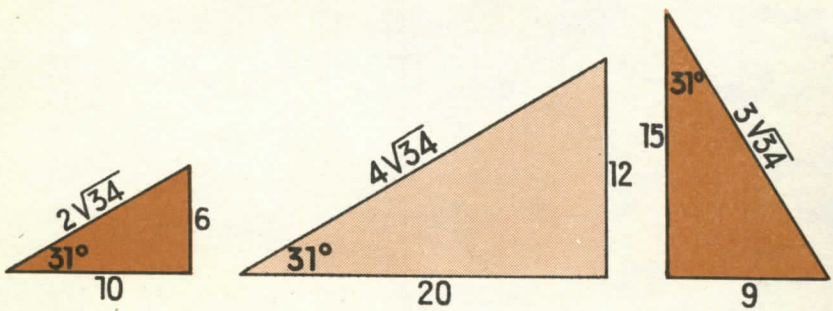
Razones goniométricas de un ángulo agudo

169. Relaciones entre lados y ángulos de un triángulo rectángulo

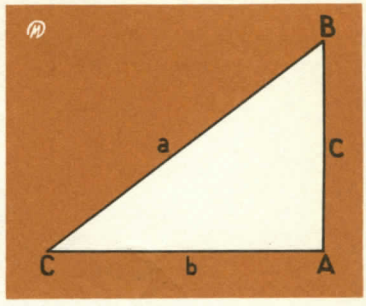
En la figura tenemos tres triángulos semejantes, porque tienen, por construcción, dos ángulos iguales: el de 90° y el de 31°. Las medidas de los lados son las indicadas. Si en cada triángulo se divide el cateto opuesto al ángulo de 31° por la hipotenusa, se obtiene el mismo cociente $\frac{3}{\sqrt{34}}$, en virtud de la propiedad de la semejanza. Este cociente constante se llama **seno del ángulo 31°.**

Si se divide el cateto adyacente al ángulo de 31° por la hipotenusa, se obtiene el mismo cociente $\frac{5}{\sqrt{34}}$. Este cociente constante se llama **coseno del ángulo 31°.**

Y si se divide el cateto opuesto por el cateto adyacente al mismo ángulo, se obtiene el mismo cociente 3/5. Este cociente constante se llama **tangente del ángulo 31°.**



170. Definiciones



En un triángulo rectángulo, *seno de un ángulo agudo C, es la razón entre el cateto opuesto al mismo y la hipotenusa* (se escribe: sen C).

Así:

$$\text{sen } C = \frac{c}{a}$$

En un triángulo rectángulo, *coseno de un ángulo agudo C es la razón entre el cateto adyacente al mismo y la hipotenusa* (se escribe: cos C).

Así:

$$\cos C = \frac{b}{a}$$

En un triángulo rectángulo, *tangente de un ángulo agudo C, es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente a dicho ángulo* (se escribe: tg C).

Así:

$$\text{tg } C = \frac{c}{b}$$

Si en esta fórmula que define la tangente dividimos al numerador y denominador por la hipotenusa **a,** se tiene:

$$\text{tg } C = \frac{c : a}{b : a} = \frac{\text{sen } C}{\cos C}$$

La tangente de un ángulo es igual a la razón entre el seno y el coseno del mismo.

El seno, coseno y tangente se llaman **razones goniométricas** o **trigonométricas.** Y Trigonometría es el estudio de las relaciones existentes entre los lados y los ángulos de un triángulo.

171. Otras razones goniométricas

Algunas veces, por conveniencia, pero sin ser necesario, se usan otras razones goniométricas, cuyas definiciones y notaciones son las siguientes:

$$\text{secante de C} \ldots\ldots \sec C = \frac{1}{\cos C}$$

$$\text{cosecante de C} \ldots\ldots \operatorname{cosec} C = \frac{1}{\operatorname{sen} C}$$

$$\text{cotangente de C} \ldots\ldots \operatorname{cotg} C = \frac{1}{\operatorname{tg} C}$$

172. Variación de las razones goniométricas al variar el ángulo

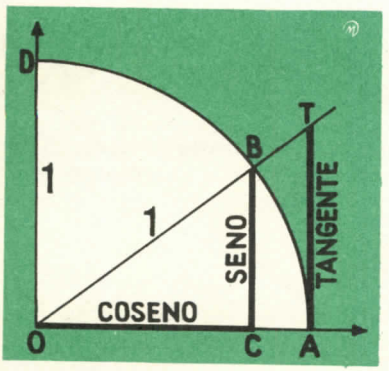
Consideremos el ángulo AOB, cuyo lado OA permanece fijo mientras el lado OB gira de modo que el ángulo va tomando todos los valores entre 0^o y 90^o. Tomemos la longitud OB como unidad. Entonces el punto B describe un arco de circunferencia, de centro O y radio 1, que suele denominarse **circunferencia goniométrica.**

En una posición cualquiera del lado OB el **seno** del ángulo AOB valdrá

$$\operatorname{sen} AOB = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{1} = BC$$

esto es, vendrá dado por *la longitud del cateto vertical BC*. Del mismo modo el **coseno** del ángulo AOB será

$$\cos AOB = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{1} = OC$$



viniendo dado por *la medida del cateto horizontal OC*.

La tangente se determina mejor en el triángulo OAT, siendo AT la tangente a la circunferencia en el punto A, pues es

$$\operatorname{tg} AOB = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

O sea la medida del segmento AT coincide con el valor de la tangente del ángulo AOB.

De la figura se deduce inmediatamente que al variar el ángulo AOB varían las seis razones trigonométricas. Luego cada una de ellas es función del ángulo, y por eso se las llama también **funciones goniométricas** o **trigonométricas.**

Al aumentar el ángulo agudo, aumentan el seno y la tangente y disminuye el coseno.

Se observa igualmente que el seno y el coseno varían de 0 a 1. Cuando B coincide con A, siendo el ángulo 0°, no hay en realidad triángulo rectángulo. Pero como BC se anula y OC se convierte en OA = 1, diremos que

$$\text{sen } 0^\circ = 0 \quad ; \cos 0^\circ = 1$$

Análogamente, cuando $\widehat{AOB} = 90^\circ$, BC se convierte en OD = 1, y OC se anula. Luego diremos que

$$\text{sen } 90^\circ = 1 \quad ; \quad \cos 90^\circ = 0$$

En cambio la tangente puede tomar cualquier valor positivo. Cuando AOB = 0°, AT se anula; luego

$$\text{tg } 0^\circ = 0$$

Al acercarse el ángulo AOB a 90°, la medida del segmento AT se hace mayor que cualquier número por grande que sea.

173. Funciones de los ángulos complementarios

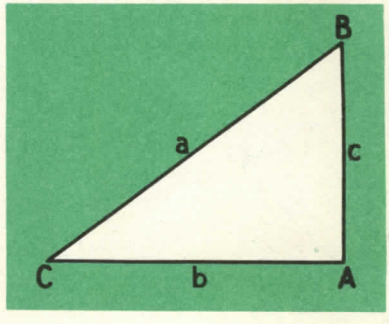
Sabemos que en el triángulo rectángulo los ángulos B y C son complementarios; esto es, B = 90° — C. Luego:

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} = \cos C = \cos (90^\circ - B)$$

$$\cos B = \frac{c}{a} = \text{sen } C = \text{sen } (90^\circ - B)$$

$$\text{tg } B = \frac{b}{c} = \text{cotg } C = \text{cotg } (90^\circ - B)$$

$$\text{cotg } B = \frac{c}{b} = \text{tg } C = \text{tg } (90^\circ - B)$$



$$\sec B = \frac{a}{c} = \text{cosec } C = \text{cosec } (90^\circ - B)$$

$$\text{cosec } B = \frac{a}{b} = \sec C = \sec (90^\circ - B)$$

Cada función goniométrica de un ángulo agudo es igual a la cofunción del mismo nombre del ángulo complementario.

Co-seno significa seno del complemento, y análogamente las otras cofunciones.

Por lo tanto, sen 60° = cos $(90^\circ - 60^\circ)$ = cos 30°; sec $73^\circ\ 30'$ = = cosec $(90^\circ - 73^\circ\ 30')$ = cosec $16^\circ\ 30'$, y así sucesivamente.

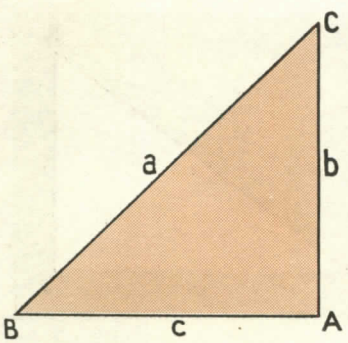
174. Tablas de funciones goniométricas

Los valores de las funciones goniométricas se han calculado por un procedimiento que no podemos explicar aquí, y se han colocado en tablas de muy diversas formas, de las que damos un ejemplo en el Programa de este libro. Se llaman **tablas naturales,** para distinguirlas de las **logarítmicas,** que se estudiarán en cursos posteriores.

En las que damos en nuestro Programa se observa que la misma tabla sirve para los senos y los cosenos, pues donde se lee el seno de un ángulo se lee también el coseno del ángulo complementario. Lo mismo se ha de decir respecto de la tangente y de la cotangente.

En el mismo Programa damos una explicación del manejo de las Tablas.

175. Relaciones entre las funciones de un mismo ángulo



Ya que en la figura es:

$$c^2 + b^2 = a^2$$

tenemos:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1$$

o sea:

$$\textbf{sen}^2\ C + \textbf{cos}^2\ C = 1 \qquad (1)$$

Es costumbre escribir $\text{sen}^2\ C$ en vez de $(\text{sen}\ C)^2$ y análogamente para las otras funciones.

Esta fórmula es una de las más importantes de Trigonometría y debe recordarse, lo mismo que las cuatro siguientes, ya estudiadas en los números 173 y 174:

$$\mathbf{tg\ C = \frac{sen\ C}{cos\ C}} \quad ; \quad \mathbf{cotg\ C = \frac{cos\ C}{sen\ C}}$$

$$\mathbf{sec\ C \times cos\ C = 1} \quad ; \quad \mathbf{cosec\ C \times sen\ C = 1}$$

Estas, junto con la fórmula (1), forman cinco relaciones entre sí independientes, que ligan las seis razones trigonométricas de un ángulo y que permiten hallar las cinco restantes conociendo una de ellas.

Hay otras relaciones secundarias de bastante interés. De la igualdad $c^2 + b^2 = a^2$, sale:

$$\frac{c^2}{b^2} + 1 = \frac{a^2}{b^2}; \quad \text{o sea} \quad \mathbf{1 + tg^2\ C = sec^2\ C} \qquad (2)$$

Y análogamente tenemos:

$$1 + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

de donde:

$$\mathbf{1 + cotg^2\ C = cosec^2\ C} \qquad (3)$$

EJEMPLOS:

1.º *Hallar los valores de las cinco restantes funciones cuando* $\cos C = \frac{1}{3}$.

Solución: Sustituyendo este valor del cos C en la fórmula (1) se tiene:

$$\text{sen}^2\ C + \frac{1}{9} = 1 \quad ; \quad \text{sen}^2\ C = \frac{8}{9}$$

$$\text{sen C} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\text{tg C} = \frac{\text{sen C}}{\text{cos C}} = \frac{2\sqrt{2}/3}{1/3} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{cotg } C = \frac{\cos C}{\text{sen } C} = \frac{1/3}{2\sqrt{2}/3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sec C = \frac{1}{\cos C} = 3$$

$$\text{cosec } C = \frac{1}{\sec C} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

2.º *Hallar las restantes razones trigonométricas, sabiendo que* $\text{tg } C = \frac{2}{5}$.

Solución: Aplicando la fórmula (2):

$$1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \sec^2 C \quad ; \quad \frac{29}{25} = \sec^2 C \quad ; \quad \sec C = \frac{\sqrt{29}}{5}$$

$$\cos C = \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$$

Aplicando la fórmula (1):

$$\text{sen}^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - \frac{25}{29} = \frac{4}{29}$$

$$\text{sen } C = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

$$\text{cosec } C = \frac{\sqrt{29}}{2} \quad ; \quad \text{ctg } C = \frac{5}{2}$$

EJERCICIOS

1. En un triángulo rectángulo es $\text{sen B} = \frac{b}{a}$. Escribe las otras 5 funciones del ángulo B.

2. Di cuál de las funciones siguientes es mayor:

a) sen C o tg C.
b) cos C o cotg C.
c) sec C o tg C.
d) cosec C o cotg C.

3. Halla los valores de las seis funciones de C si **c, b, a** tienen, respectivamente, los siguientes valores:

a) 3, 4, 5 mm.
b) 5, 12, 13 cm.
c) 8, 15, 17 dm.
d) 9, 40, 41 m.
e) 3,9, 8, 8,9 cm.
f) 1,19, 1,20, 1,69 dm.

4. Basándote en la relación $a^2 = b^2 + c^2$, halla las seis funciones de C si:

a) c = b.
b) c = 2 b.
c) c = 2 b/3.

5. Halla las funciones de B si:

a) c = 24 m.; b = 143 m.
b) c = 0,264 m.; a = 0,265 m.

6. Expresa como funciones de ángulos menores que 45° (basándote en el número 176) las siguientes funciones:

a) sen 62° 17'.
b) tg 75° 28'.
c) cos 87° 32'.
d) sec 81° 26'.

7. Hallar el valor de A dado por las relaciones siguientes:

a) cos A = sen (45° — A/2).
b) cotg A/2 = tg A.
c) tg (45° + A) = cotg A.
d) cos 4 A = sen A.

8. Hallar las cinco restantes razones, conociendo:

a) sen C = 0,5.
b) sen C = 1/5.
c) sen C = $\sqrt{2}/2$.
d) sec C = 5.
e) cosec C = 2.
f) sec C = $\sqrt{2}$.
g) tg C = 3/4.
h) tg C = 4/3.
i) cotg C = 3.

9. Por medio de las tablas naturales hallar los valores de las siguientes funciones:

a) sen 7° 30'.
b) cos 12° 42'.
c) tg 80° 50'.
d) ctg 18° 23'.
e) sen 41° 6'.
f) cos 37° 18'.

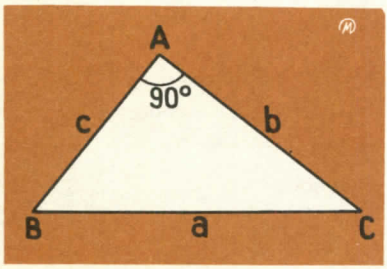
10. Hallar los ángulos definidos por las siguientes ecuaciones:

a) sen x = 0,6550.
b) cos x = 0,9744.
c) tg x = 1,8116.
d) ctg x = 3,4183.
e) sen x = 0,4276.
f) tg x = 2,6558.

29

Resolución de triángulos rectángulos

176. Relaciones entre los elementos de un triángulo rectángulo



Sea el triángulo ABC.

Por definición se tiene:

$$\text{sen } C = \frac{c}{a}$$

$$\text{de donde } c = a \text{ sen } C \qquad (1)$$

$$\cos C = \frac{b}{a}$$

$$\text{de donde } b = a \cos C \qquad (2)$$

$$\text{tg } C = \frac{c}{b}; \text{ de donde } c = b \text{ tg } C \qquad (3)$$

$$\text{cotg } C = \frac{b}{c}; \text{ de donde } b = c \text{ cotg } C \qquad (4)$$

Estas cuatro relaciones pueden expresarse así:

(1) Un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto a dicho cateto.

(2) Un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el coseno del ángulo contiguo a dicho cateto.

(3) Un cateto es igual al producto del otro cateto por la tangente del ángulo opuesto al primero.

(4) Un cateto es igual al producto del otro cateto por la cotangente del ángulo contiguo al primero.

También conocemos las dos siguientes relaciones:

$$\widehat{C} + \widehat{B} = 90^\circ \qquad (5)$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \qquad (6)$$

Con estas seis relaciones entre los tres lados y los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo se puede determinar éste si se conoce:

1.º La hipotenusa y un cateto.

2.º Un cateto y un ángulo agudo.

3.º La hipotenusa y un ángulo agudo.

4.º Los dos catetos.

177. Primer caso: se conocen la hipotenusa y un cateto

EJEMPLO:

En el triángulo ABC se conocen $a = 37$ cm., $b = 31$ cm. Hallar los restantes elementos.

Solución: En virtud de la relación (6):

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a + b)\,(a - b)} = \sqrt{68 \times 6}$$

ya que $a + b = 37 + 31 = 68$, $a - b = 37 - 31 = 6$.

La fórmula del seno da

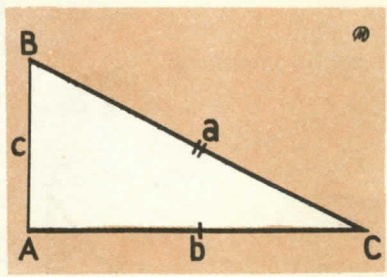
$$\text{sen } B = \frac{b}{a} = \frac{31}{37} = 0{,}8378$$

y buscando este valor en las tablas naturales se encuentra que

$$\widehat{B} = \mathbf{56^\circ\ 54'}$$

de donde, por la relación (5),

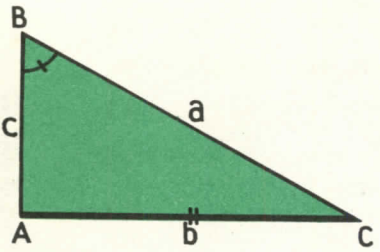
$$\widehat{C} = 90^\circ - 56^\circ\ 54' = \mathbf{33^\circ\ 6'}$$



178. Segundo caso: se conocen un cateto y un ángulo agudo

EJEMPLO:

En el triángulo ABC es $b = 34$ dm. y $\widehat{B} = 63^\circ\ 20'$. Hallar los restantes elementos.



Solución: Aplicando la fórmula (5)

$$\widehat{C} = 90^o - 63^o\ 20' = \mathbf{26^o\ 40'}$$

y en virtud de la relación (4):

$$c = b \text{ ctg } B = 34 \times \text{ctg } 63^o\ 20' = \mathbf{= 17{,}07\ dm.}$$

La fórmula del seno determina la hipotenusa:

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} \quad ; \quad a = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{34}{\text{sen } 63^o\ 20'} = \mathbf{38{,}05\ dm.}$$

179. Tercer caso: se conocen la hipotenusa y un ángulo agudo

EJEMPLO:

En el triángulo ABC se conocen $a = 54$ mm. y $\widehat{C} = 43^o\ 26'$. Hallar los restantes elementos.

Solución: En virtud de la fórmula (5) sale inmediatamente

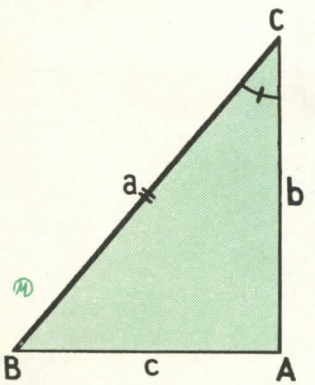
$$\widehat{B} = 90^o - 43^o\ 26' = \mathbf{46^o\ 34'}$$

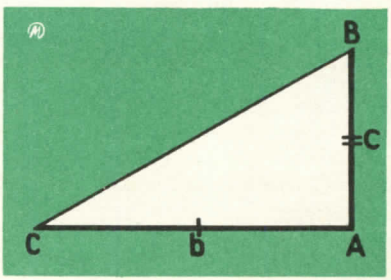
Por la relación (1):

$$c = a \times \text{sen } C = 54 \times \text{sen } 43^o\ 26' = \mathbf{37{,}125\ mm.}$$

y según la relación (2):

$$b = a \times \cos C = 54 \times \cos 43^o\ 26' = \mathbf{39{,}214\ mm.}$$





180. Cuarto caso: se conocen los dos catetos

EJEMPLO:

En un triángulo ABC se tiene: b = 128 cm., c = 76 cm. Determinar los restantes elementos.

Solución: La relación (6) nos da

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{128^2 + 76^2} = \mathbf{148\ cm.}$$

Cálculo de $\widehat{C}$:

$$\text{tg } C = \frac{c}{b} = \frac{76}{128} = 0{,}5937$$

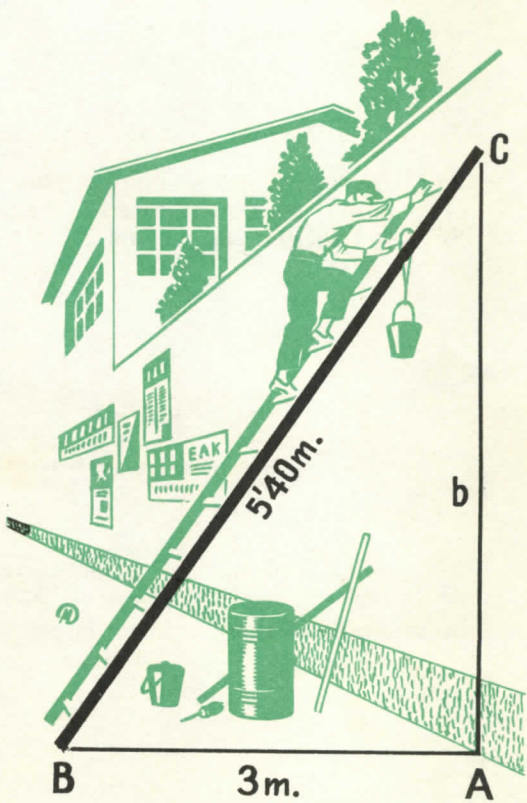
$$\mathbf{C = 30^o\ 42'}$$

El ángulo C se halla en la tabla de tangentes naturales. Análogamente

$$\text{tg } B = \frac{b}{c} = \frac{128}{76} = 1{,}6842 \quad ; \quad \mathbf{B = 59^o\ 18'}$$

181. Aplicaciones

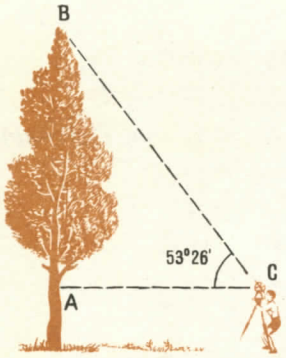
La resolución de triángulos rectángulos tiene muchas aplicaciones para el **cálculo de alturas, determinación de ángulos e inclinaciones, trazado de planos,** etcétera. Daremos aquí algunos ejemplos.



EJEMPLOS:

1.º *Una escalera de 5,40 metros de larga está apoyada contra una pared, distando su pie 3 metros de la misma. Hallar la altura de la pared a que alcanza dicha escalera y el ángulo que forma con la pared.*

Solución: Se conocen a = 5,40 m. y c = 3 m. Por tanto, en virtud de la fórmula (6)



$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(a + c)\ (a - c)} =$$
$$= \sqrt{8{,}40 \times 2{,}40} = \mathbf{4{,}50\ m.}$$

Para hallar el ángulo C se aplica la fórmula del seno:

$$\text{sen } C = \frac{c}{a} = \frac{3}{5{,}40} = 0{,}5555$$

Luego buscando en las tablas naturales

$$\mathbf{C = 33^o\ 44'}$$

2.º *Hallar la altura del árbol de la figura, sabiendo que la distancia del observador al árbol es AC = 24 m., la inclinación de la visual dirigida a la cúspide del mismo es C = 53º 26' y la altura del aparato con que se mide dicha inclinación es 1,4 m.*

Solución: Aplicando la fórmula de la tangente

$$\text{tg } C = \frac{AB}{AC}$$

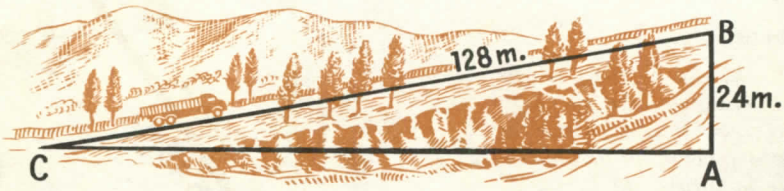
$$AB = AC \times \text{tg } C = 24 \times \text{tg } 53^o\ 26' = 24 \times 1{,}3481 = 32{,}3 \text{ m.}$$

La altura del árbol será

$$32{,}3 + 1{,}4 = \mathbf{33{,}7\ m.}$$

El aparato que más se emplea para medir ángulos e inclinaciones es el **teodolito,** representado en la figura.

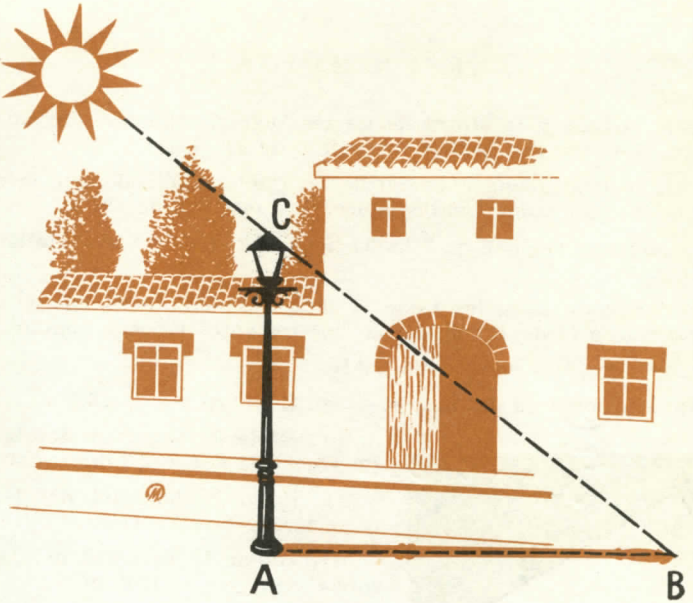
Se llama **inclinación** de una recta al ángulo que forma con la horizontal.



3.º *Hallar la inclinación de una carretera, sabiendo que con una longitud de 128 m. salva un desnivel de 24 m.*

Solución: Aplicando la fórmula del seno

$$\text{sen } C = \frac{24}{128} = 0{,}1875$$



Luego

$$\mathbf{C = 10^o\ 48'}$$

4.º *Halla la inclinación de los rayos solares en un instante en que un farol de 2,50 m. proyecta una sombra de 3,15 m.*

Solución: La inclinación es el ángulo B, que se determina por la fórmula de la tangente:

$$\text{tg B} = \frac{\text{CA}}{\text{AB}} = \frac{2{,}50}{3{,}15} = 0{,}7936$$

Luego

$$\mathbf{\widehat{B} = 38^o\ 26'}$$

La tangente trigonométrica de la inclinación se denomina **pendiente** de la recta. En este caso la pendiente de los rayos solares es tg B = 0,7936. La pendiente de la carretera del problema anterior se determinaría hallando el cateto AC = $\sqrt{128^2 - 24^2} = 125{,}5$ metros; la pendiente será

$$\text{tg C} = \frac{24}{125{,}5} = 0{,}19$$

EJERCICIOS

1. Halla la base y la altura de un rectángulo, sabiendo que su diagonal mide 36 cm. y forma con la base un ángulo de 32° 48'.

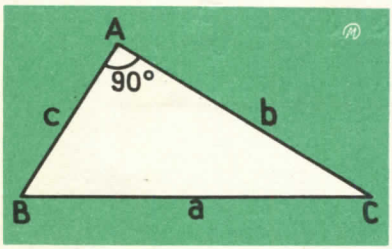
2. Halla el lado y una diagonal de un rombo, sabiendo que la otra diagonal mide 364 mm. y los ángulos opuestos a ella son de 68° 38'.

3. Un polígono regular de 7 lados tiene el radio de 5 dm. Hallar el lado y la apotema.

4. Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 24 cm. y la altura correspondiente a él de 18 cm. Hallar los restantes lados y ángulos.

5. En el triángulo rectángulo CAB:

a) Halla la longitud del lado **c**, si sen C = 3/5 y a = 20,5 m.



b) Halla la longitud del lado **b**, si cos C = 0,44 y a = 3,5 dm.

c) Halla la longitud del lado **c**, si tg = 11/3 y b = 27/11 cm.

d) Hallar la longitud del lado **b**, si cotg C = 4 y c = 1700 m.

e) Hallar la hipotenusa, si sec C = 2 y b = 2000 mm.

f) Hallar la hipotenusa, si cosec C = = 6,4 y c = 35,6 cm.

6. Halla la hipotenusa y un cateto dados:

a) b = 6 dm.; tg C = 3/2.

b) b = 4 m.; cosec C = 5/3.

7. Resuelve un triángulo rectángulo conociendo:

a) a = 37 dm., $\widehat{B}$ = 67° 30'.

c) b = 27 mm., $\widehat{B}$ = 37° 20'.

b) a = 13 cm., b = 5 cm.

d) b = 64 m., c = 48 m.

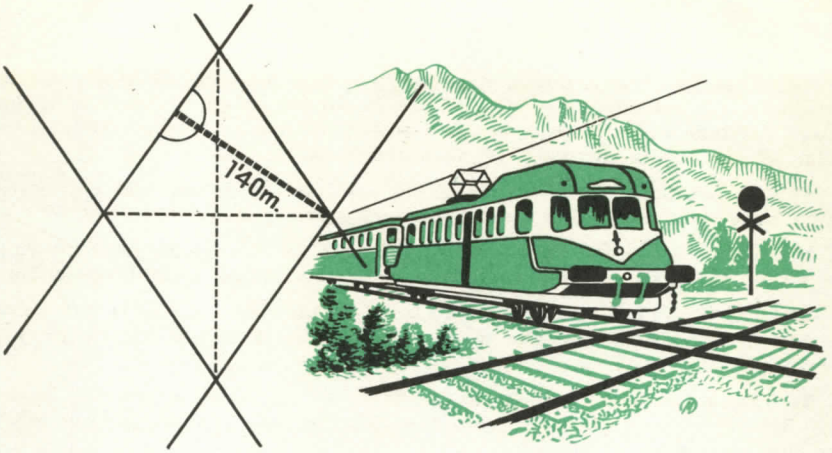
8. Una escalera de 6 m. de altura está apoyada sobre una pared alcanzando 5 m. de altura sobre la misma. ¿Cuál es el ángulo formado entre la escalera y el suelo horizontal?

9. Halla la altura de una torre, sabiendo que la visual dirigida por un observador al punto más alto de la misma forma un ángulo de 30° con la horizontal y que dicho observador está a 45 m. de la torre.

10. Una cuerda subtiende un arco de 108° 40' de una circunferencia y está a 54 cm. del centro de la misma. Hallar el radio de la circunferencia y la longitud de la cuerda.

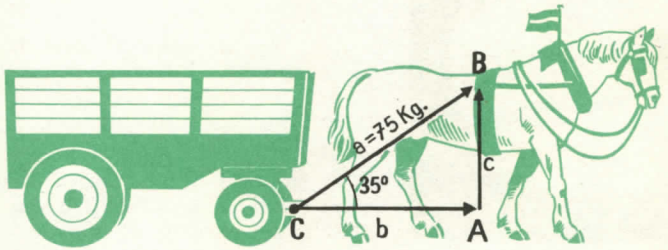
11. Para hallar la altura de un edificio se estacionó el teodolito a 74 m. de su pie; altura del instrumento, 1,25 m.; inclinación de la visual al punto más alto, 64° 32'. Hallar dicha altura.

12. Halla la longitud de la sombra de una torre de 145 m. de altura cuando la inclinación de los rayos solares es de 34° 15'.

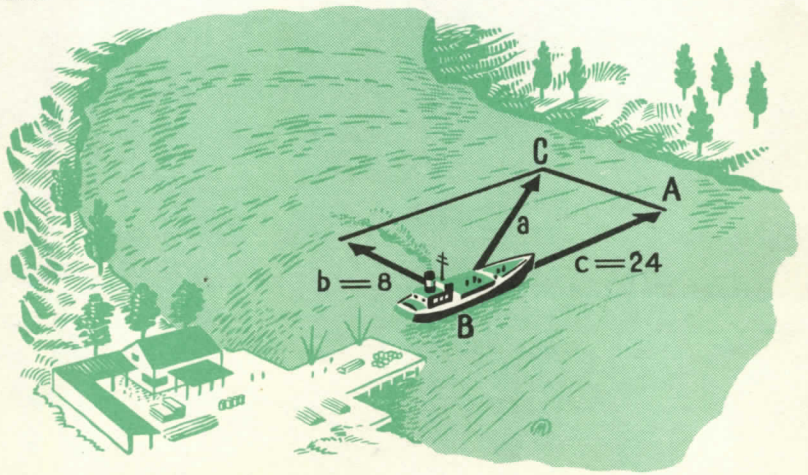


13. Dos vías de igual ancho (1,40 m.), al cruzarse, forman un rombo. Si se cortan bajo un ángulo de 72º 48', hallar el lado de dicho rombo y sus dos diagonales.

14. ¿Qué ángulo forman dos tangentes a una circunferencia de 21 cm. de radio desde un punto que dista 35 cm. del centro de dicha circunferencia?



15. Un caballo tira de una vagoneta con una fuerza de 75 kg., inclinada 35º sobre el horizonte. Determinar la fuerza horizontal CA que hace deslizarse a la vagoneta, la fuerza vertical AB y el ángulo que forma CB con ésta.



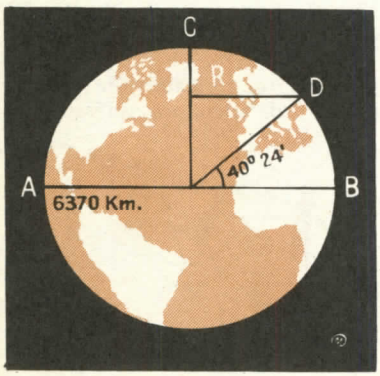
16. Una gasolinera puede navegar con velocidad de 24 km/h. en agua tranquila. La velocidad de la corriente de un río es de 8 km/h. Si la gasolinera parte de la orilla en dirección perpendicular a la misma, hallar la velocidad efectiva y la dirección de la trayectoria.

17. Si las puntas de las ramas de un compás distan 6,25 cm. y cada rama mide 11,5 cm., ¿qué ángulo forman?

18. Desde un cierto punto del suelo se ve un rascacielos bajo un ángulo de 34º 52'. Hallar bajo qué ángulo se verá colocándose a doble distancia.

19. Un individuo de 1,75 m. proyecta en un cierto instante una sombra de 1,34 m. Hallar en ese instante la pendiente y la inclinación de los rayos solares.

20. En una circunferencia de 4,2 cm. de radio se señala un arco de 112º 36'. Hallar el área del recinto formado por este arco y las tangentes en sus dos extremos.



21. Hallar la altura de un triángulo isósceles, cuya base mide 8,6 cm., siendo de 48º los ángulos adyacentes a la misma.

22. Las diagonales de un rombo miden 75 y 90 mm. Hallar la longitud de los lados del mismo y los ángulos que forman.

23. En un trapecio isósceles las bases miden 24 y 32 cm. y la altura 16 cm. Hallar los ángulos de dicho trapecio y la longitud del lado oblicuo.

24. Sabiendo que la latitud de Madrid es de 40º 24' y que la Tierra es aproximadamente una esfera de 6.370 km., hallar el radio R del paralelo de Madrid.

Aprobado por el M. de E. y C.
con fecha 17-6-70
B. O. del M. E. y C. del 2-7-70
95 ptas. (precio autorizado) 1970

Distribuyen:

EDICIONES S. M. ● Gral. Tabanera, 39 - MADRID 19
BIBLIOGRAFICA ESPAÑOLA, S. A. ● Nieremberg, 14 - MADRID
EDITORIAL BRUÑO ● Bocángel, 15 - MADRID
EDITORIAL L. VIVES ● Fdo. el Católico, 63 - ZARAGOZA